Leitfaden zu Beweisen

Henning Seidler

24. Januar 2020

This work is licensed under the *Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 License.*

Beachtet insbesondere Abschnitt 3 DAS Schema. Das meine ich ernst!

1 Allgemeine Richtlinien

Da insbesondere die Beweise am meisten Probleme in den Hausaufgaben verursachen, will ich mich mal daran versuchen ein paar grundsätzliche Richtlinien/Hilfen dafür aufzustellen

Zuerst möchte ich aus der Mathematikolympiade zitieren

> Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Die Rolle von Schulunterricht und Arbeitsgemeinschaft übernehmen bei uns andere vorangegangene Veranstaltungen, insbesondere TheGI1 und TheGI2.

Weiterhin solltet ihr am besten kurze Hauptsätze verwenden. Die haben das geringste Fehlerpotential. Es gibt keine Note auf den Sprachstil.

2 Typische Formulierungen

- Sei/Wähle ...
- Es gilt ...
- Daraus folgt ...
- Wegen ... und ... gilt ...

3 DAS Schema

Für Beweisaufgaben ist es wichtig, dass man sich zuerst einmal klar macht, was die Voraussetzungen/Annahmen sind und was die zu zeigenden Aussagen sind. Haltet Ausschau, an welcher Stelle in der zu zeigenden Aussage Quantoren, Negation und Implikation stecken. Dann macht Mustererkennung.
Die Formulierungen mit den Quantoren sollten sich jedoch nur auf dem Schmierblatt befinden.
Wenn es sich um eine zu zeigende Aussage handelt:

- $\forall x$.blubb: „Sei x beliebig. Zu zeigen: blubb“
- $\forall x \in A$.blubb, A rekursiv definiert: Induktion
  (insbesondere: natürliche Zahlen, Formeln, Loop/While-Programme)
- $\exists x$.blubb: „Wähle $x = \ldots$“ oder „Konstruiere x wie folgt $\ldots$“
  Zeige dann, dass für x die Eigenschaft blubb gilt.
- $\exists! x$.blubb: Zeige $\exists x$.blubb.
  „Angenommen für x und y gilt blubb. Zu zeigen $x = y$.“
- $\neg\forall x$.blubb: „Wir geben ein Gegenbeispiel an.“
- $\neg\exists x$.blubb: „Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen es existiert ein x mit blubb.“
- A impliziert B:
  „Angenommen A
  zu zeigen B“
- Wenn keiner der Fälle zutrifft, schaut, ob ihr eine Definition einsetzen könnt.

Wenn es sich um eine Annahme handelt:

- $\forall x.\,\mathrm{blubb}(x)$: Setze geeignete Werte $x_1, x_2, \ldots$ für x ein. Dann gilt $\mathrm{blubb}(x_1), \ldots$.
- $\exists x.\,\mathrm{blubb}(x)$: „Sei x_0 ein Element mit der Eigenschaft $\mathrm{blubb}(x_0)$.“
- A impliziert B: Versucht, Aussage A zu zeigen. Damit gilt B.