Verschiedene Integritätsbereiche

In der Vorlesungstyp wurden verschiedene Klassen von Ringen definiert, welche wir hier zusammenstellen wollen. Zunächst erinnern wir an die Definitionen.

Definition. Es sei A ein Ring (also ein beliebiger Ring mit Eins). Wir nennen A

- *kommutativ*, falls die Multiplikation in A kommutativ ist.
- einen *Integritätsbereich*, falls A kommutativ ist und keine Nullteiler besitzt.
- einen *faktoriellen Ring*[1], falls A ein Integritätsbereich ist und all seine Elemente eine eindeutige Zerlegung in Irreduzible besitzen.
- einen *Hauptidealbereich*, falls A ein Integritätsbereich ist und jedes Ideal in A ein Hauptideal ist.
- einen *euklidischen Bereich*, falls A ein Integritätsbereich ist und es eine gewisse Abbildung $d\colon A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ gibt, welche Division mit Rest erlaubt.
- einen *Körper*, falls A kommutativ ist und jedes Element außer Null eine Einheit ist (und $0 \neq 1$).

Bei uns sind also faktorielle Ringe, Hauptidealbereich und euklidische Bereiche (und natürlich Körper) stets Integritätsbereiche und Integritätsbereiche sind kommutativ. Außerdem gelten folgende Beziehungen:

$$\text{Körper} \Rightarrow \text{euklidische} \overset{4.58}{\Longrightarrow} \text{Hauptidealbereich} \overset{4.65}{\Longrightarrow} \text{faktorielle} \Rightarrow \text{Integritätsbereich}$$

Damit meinen wir z. B. dass jeder euklidische Bereich nach Satz 4.58 aus der Vorlesung ein Hauptidealbereich ist. Für die erste Implikation können wir das benötige d gänzlich beliebig wählen: In Körpern gibt es nicht nur eine Division mit Rest, sondern eine tatsächliche Division.

Die Umkehrungen gelten nicht immer: $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ist ein Integritätsbereich, aber nicht faktoriell, $\mathbb{Z}[X]$ oder $\mathbb{Q}[X,Y]$ ist faktoriell, aber kein Hauptidealbereich, $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}]$ ist ein Hauptidealbereich, aber nicht euklidisch (beides keineswegs offensichtlich!), $\mathbb{Q}[X]$ ist euklidisch, aber kein Körper.

Noethersche Ringe, auch wenn vielleicht nur aus der Übung bekannt, lassen sich ähnlich einordnen. Nennen wir einen Integritätsbereich, in dem jedes Ideal endlich erzeugt ist (d. h. $\mathfrak{a} = (a_1, \dots, a_n)$ für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ und entsprechende $a_i \in A$), einen *noetherschen Bereich*, so ist natürlich jeder Hauptidealbereich noethersch.

Zwischen faktoriellen Ringen und noetherschen Bereichen besteht jedoch kein weiterer Zusammenhang ($\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ist noethersch, aber nicht faktoriell, $\mathbb{Q}[X_1, X_2, \dots]$ ist faktoriell, aber nicht noethersch).

Abschließend sei bemerkt, dass einige Autoren z. B. zwischen Hauptidealbereichen und Hauptidealringen unterscheiden – die Endung -bereich weist dann darauf hin, dass der betrachtete Ring ein Integritätsbereich ist, während ein Hauptidealring ggf. keiner sein muss. (im Englischen sagt man domain für Bereich) Wir haben auf diese Unterscheidung nur verzichtet, als wir „faktorieller Ring“ und nicht „faktorieller Bereich“ sagten.

[1] Die Abkürzungen UFD für unique factorization domain und ZPE für Zerlegung in Primelemente sind im Umlauf.