1 Anmerkungen zum Formulieren von Beweisen und Rechnungen

Die wichtigste Grundregel, die es beim Formulieren eines Beweises bzw. der Lösung einer Hausaufgabe zu beachten gilt, ist: Es ist ein **Text** zu schreiben. Wie üblich sollte ein Text aus vollständigen Sätzen bestehen, zu denen auch Subjekte, Prädikate und Satzzeichen gehören – ja, auch Sätze, die in einer mathematischen Formel enden, sind mit einem Punkt zu beenden.

Im Idealfall sollte nie eine Gleichungskette oder Äquivalenzumformung auftauchen, ohne dass sie in einen Satz eingebaut ist – auch wenn dieser nur aus „Es gilt … “ bestehen möge.

Die Formulierung vollständiger Sätze ist jedoch nur der erste Schritt zur guten Lesbarkeit. Um diese gänzlich zu gewährleisten, macht euch bewusst, dass der Leser bzw. Korrektor nicht weiß, was ihr euch beim Schreiben gedacht habt. Wenn ihr zwei Gleichungen untereinanderschreibt, ist dem Leser nicht klar, in welcher Beziehung diese stehen sollen: Behauptet ihr, sie seien äquivalent? Soll die eine die andere implizieren? Sollen beide gelten? Schreibt ihr $L = \dots$ und wollt damit eine Lösungsmenge bezeichnen, so sollte dies auch angemerkt werden. Oftmals kann der Leser erahnen, wie eure Aufschrift zu interpretieren ist, deren Aussage sollte jedoch eindeutig und ohne Notwendigkeit einer Interpretation zu verstehen sein.

Achtet ihr also darauf, eure Argumentation in vollständigen Sätzen darzulegen und euch nicht auf die Intuition des Korrektors zu verlassen, ist nur noch die fachliche Richtigkeit zu gewährleisten. Da die Lesbarkeit jedoch bereits eine gewisse formale Korrektheit erfordert, sei euch an dieser Stelle eine Übersicht über die wichtigsten zu beachtenden Punkte gegeben:

Variablen Benutzt ihr eine Variable, so muss sie entweder in der Aufgabenstellung oder im bisherigen Teil eurer Lösung definiert worden sein. Ihr dürft nicht stillschweigend voraussetzen, dass n eine natürliche Zahl bezeichnet oder L die Lösungsmenge einer betrachteten Gleichung ist.

Pfeile Die verschiedenen Pfeile haben in der Regel eine feste Bedeutung. Der Pfeil $\Leftrightarrow$ ist ein Äquivalenzpfeil. Er steht zwischen zwei Aussagen und bedeutet, dass die linksstehende Aussage die rechtsstehende impliziert und umgekehrt. Der Pfeil $\Rightarrow$ ist ein Implikationspfeil und steht ebenfalls zwischen zwei Aussagen. Er bedeutet, dass die rechtsstehende Aussage aus der linksstehenden folgt. Analog ist $\Leftarrow$ zu verwenden. Insbesondere ist zu beachten, dass diese drei Pfeile nur Aussagen verbinden können. Schreibweisen wie „positiv $\Rightarrow$ nichtnegativ“ sind also sinnfrei. Achtet auch darauf, stets die benötigte Implikationsrichtung darzustellen (siehe auch „Schlussfolgerungen“). Übrigens: Ein Gleichheitszeichen kann keinen Äquivalenzpfeil ersetzen.

Der Pfeil $\to$ wird entweder verwendet, um anzugeben, zwischen welchen Räumen eine Funktion abbildet, oder um Konvergenz zu kennzeichnen. Der Pfeil $\mapsto$ dient zur Definition einer Funktion und gibt an, worauf ein bestimmtes Element abgebildet wird.

Stellt sicher, dass ihr die Pfeile nicht für eigene Bedeutungen missbraucht. Wollt ihr „In diesem Fall können wir die betrachtete Gleichung also folgendermaßen schreiben“ sagen, so ist dafür kein Implikationspfeil zu verwenden. Für solche Verwendungen ist der Pfeil $\rightsquigarrow$ angebracht, der keine fest zugewiesene mathematische Bedeutung hat. Ihr könnt ihn als „Dann“ verwenden.

Funktionen Zur Definition einer Funktion gehören nicht nur eine Funktionsvorschrift, sondern auch die Angabe eines Definitionsbereiches. Wollt ihr eine Funktion f durch $f(x) = \sqrt{x}$ definieren, so müsst ihr angeben, auf welcher Menge f definiert sein soll. Dies kann entscheidende Auswirkungen haben: Ist der Definitionsbereich $(0, \infty)$, so ist f differenzierbar; ist er jedoch $[0, \infty)$, so ist f nicht differenzierbar.

Weiterhin ist zwischen Funktionen und Funktionswerten zu unterscheiden. Ist beispielsweise $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto f(x)$ gegeben, so ist $f(x)$ keine Funktion, sondern ein Funktionswert[1]. Stattdessen ist die Funktion mit f oder $x \mapsto f(x)$ zu bezeichnen. Wollt ihr einer Funktion beispielsweise keinen Namen geben, so könnt ihr auch stets von $x \mapsto x^2$ o.ä. sprechen (dabei muss jedoch weiterhin der Definitionsbereich festgelegt sein).

Quantoren Die Symbole $\forall$ und $\exists$ erfordern eine nachfolgende Aussage. Dies gilt in zweierlei Hinsicht: Erstens ist $\forall x$ kein sinnvoller Ausdruck. Vielmehr ist $\forall x \in \mathbb{R}$ oder $\forall x > 0$ zu wählen. Zweitens ist auch dies noch kein vollständiger mathematischer Ausdruck. Es fehlt nämlich die Angabe der Aussage, die für alle $x \in \mathbb{R}$ bzw. $x > 0$ gelten soll. Es ist also folgende Syntax zu verwenden:

„$\forall/\exists$ – Element – Charakterisierung des Elements – Aussage“.

Natürlich kann die letztgenannte Aussage auch wieder mit einem Quantor beginnen.

Logische Verknüpfungen Die Verknüpfungen $\wedge$ und $\vee$ können wie die Implikationspfeile nur zwischen Aussagen stehen. Auch ist zu beachten, dass Konstrukte wie $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x > 2 \Rightarrow f(-x) = 0$ mit einer geeigneten Klammerung zu versehen sind.

Schlussfolgerungen Wollt ihr eine Aussage beweisen, indem ihr zeigt, dass sie aus einer wahren Aussage hergeleitet werden kann, so solltet ihr mit dieser wahren Aussage beginnen. Könnt ihr nur eine wahre Aussage folgern, so ist nichts bewiesen. Etwa lässt sich aus $x = y$ stets durch Multiplikation mit Null die wahre Aussage $0 = 0$ herleiten, was jedoch nicht $x = y$ impliziert. Stattdessen hat die zu zeigende Aussage am Ende der Implikationskette zu stehen, nicht am Anfang (Der Pfeil $\Leftarrow$ sollte nur selten benutzt werden müssen).

Bilder Eure Argumentationen sollen gänzlich ohne Bilder auskommen. Malt nur dann eins auf euren Abgabezettel, wenn ihr der Meinung seid, es könne das Verständnis beim Lesen erleichtern[2]. Euer Text darf jedoch nicht auf das Bild angewiesen sein. Insbesondere sind aus Bildern keine Informationen abzulesen.

Für euch selbst könnt ihr natürlich beim Bearbeiten der Aufgaben eine Skizze erstellen, um eine bessere Vorstellung von der Situation zu gewinnen und eine Vermutung über die Lösung anstellen zu können. Eine solche Vermutung gilt es dann aber formal zu begründen.

Generell ist zu beachten, dass die oben aufgeführten mathematischen Zeichen möglichst nicht im Fließtext verwendet werden sollten. Das Zeichen $\exists$ sollte also nicht als Kurzform für „es existiert“ verwendet werden, sondern nur unter Beachtung der obigen Regeln geschrieben werden. Ebenso ist nicht jedes „und“ durch $\wedge$ zu ersetzen.

Einige Beispiele:

[1] In seltenen Ausnahmen werden auch Funktionen auf ähnliche Weise bezeichnet. Beispielsweise bezeichnet die Ableitung $f'(x)$ im Mehrdimensionalen eine lineare Abbildung.

[2] Ist dies jedoch notwendig, ist das in der Regel kein gutes Zeichen.

- Gebt ihr als Definition von Surjektivität „$\forall y \exists x$“ an, so meint ihr zwar sicherlich das richtige, habt aber puren Unsinn geschrieben. Geht es um eine Funktion $f\colon X \to Y$, so wäre hingegen „$\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$“ richtig.

- Schreibt ihr

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= 4x - 2 \\ 2x + 5 &= 4x \\ 5 &= 2x \\ x &= \frac{5}{2}\,, \end{aligned}$$

so ist ebenfalls zu vermuten, dass ihr das richtige meint, was jedoch nicht ersichtlich ist. Verwendet stattdessen Äquivalenzpfeile oder auch – falls ihr nur benötigt, dass $x = \frac{5}{2}$ diese Gleichung löst – nur Implikations- statt Äquivalenzpfeile.

- Schreibt ihr

$$\begin{aligned} x &= \frac{\mathrm{i}^2 - 1}{\mathrm{i}^3 - \mathrm{i}} \\ x &= \frac{-1 - 1}{\mathrm{i}^3 - \mathrm{i}} \\ x &= \frac{-2}{\mathrm{i}^3 - \mathrm{i}} \\ x &= \frac{-2}{\mathrm{i}^2 \cdot \mathrm{i} - \mathrm{i}} \\ x &= \frac{-2}{-\mathrm{i} - \mathrm{i}} \\ x &= \frac{-2}{-2\mathrm{i}} \\ x &= \frac{1}{\mathrm{i}} \\ x &= \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{ii}} \\ x &= -\mathrm{i}\,, \end{aligned}$$

so fehlen nicht mehr nur Äquivalenzpfeile. Diese könnten nämlich vermieden werden, indem ihr die Gleichungskette von den redundanten linken Seiten x befreit, was auch weniger Platz verbraucht:

$$\begin{aligned} x = \frac{\mathrm{i}^2 - 1}{\mathrm{i}^3 - \mathrm{i}} &= \frac{-1 - 1}{\mathrm{i}^3 - \mathrm{i}} = \frac{-2}{\mathrm{i}^3 - \mathrm{i}} = \frac{-2}{\mathrm{i}^2 \cdot \mathrm{i} - \mathrm{i}} \\ &= \frac{-2}{-\mathrm{i} - \mathrm{i}} = \frac{-2}{-2\mathrm{i}} = \frac{1}{\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{ii}} = -\mathrm{i}\,. \end{aligned}$$

Übrigens: Die hier vorgeführte Rechnung ist überaus ausführlich gewählt, ihr dürftet sie auch kürzer fassen.

2 Tabellarische Übersicht

An dieser Stelle sei euch eine tabellarische Übersicht über häufig vorkommende falsche Formulierungen und deren Verbesserungen gegeben.

Falsch:	**Korrigiert:**	**Bemerkung:**
Für $k \in \{\text{gerade Zahlen}\}$	Für gerades $k \in \mathbb{Z}$	
$x \in \mathbb{R} \setminus 0$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	
Es gilt $\forall$ reelle Zahlen	Es gilt für alle reellen Zahlen	Quantoren gehören nicht in den Fließtext.
Aus $x^2 + x$ folgt $x(x+1)$	Es ist $x^2 + x = x(x+1)$	
Für alle x gilt	Für alle $x \in \mathbb{R}/x > 0/ \dots$ gilt	Gebt an, von welchen x die Rede ist.
$x > 1$: $\lvert x-1 \rvert = x - 1$	Es sei $x > 1$. Dann ist $\lvert x-1 \rvert = x - 1$.	
Falls $\lvert x+3 \rvert < 0$	Falls $x + 3 < 0$	Beträge sind niemals negativ.
Es sei $a_n := \frac{1}{n}$	Es sei $a_n := \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$	Der falsche Ausdruck definiert a_n nur für ein festes n, welches zudem nicht angegeben wurde.
$a_n = \frac{1}{n} = 0$	$a_n = \frac{1}{n} \to 0$	Folgen können konvergieren, sind aber nie mit ihrem Grenzwert gleichzusetzen.
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \to a$	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$	Grenzwerte hingegen sind reelle Zahlen und konvergieren nicht.
Der Grenzwert geht gegen a	Der Grenzwert [von …] ist a	
$(-1)^n \to \pm 1$	$(-1)^n$ divergiert	
$\Rightarrow$ Konvergenz	$\Rightarrow$ Die Folge konvergiert	
Die Funktion $f(x) = x^2$	Die Funktion f mit $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$	

3 Beispielaufgaben

Nun werden einige Aufgaben mit beispielhaften Lösungen vorgestellt – je eine Lösung als Negativ- und eine als Positivbeispiel.

3.1 Aufgabe

Zeige $(n+1)^2 - (n-1)^2 = 4n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

3.2 Mangelhafte Lösung

$$\begin{aligned}
& & (n+1)^2 - (n-1)^2 &= 4n & \\
&\Rightarrow & n^2 + 2n + 1 - (n^2 - 2n + 1) &= 4n & \\
&\Rightarrow & 2n - (-2n) &= 4n & \\
&\Rightarrow & 4n &= 4n & &| - 4n \\
&\Rightarrow & 0 &= 0 & &\checkmark
\end{aligned}$$

3.3 Bemerkungen

In dieser Antwort wurde nichts bewiesen, da das Folgern einer wahren Aussage bedeutungslos ist. Stattdessen wäre stets $\Leftrightarrow$ oder $\Leftarrow$ anstelle von $\Rightarrow$ zu verwenden. Um den Weg der Argumentation zu verdeutlichen, wäre anschließend die Reihenfolge der Gleichungen umzukehren. Schöner wäre es jedoch, auf das wiederholte Aufschreiben der rechten Seite zu verzichten.

3.4 Lösung

Korrigierte Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}
& & 4n &= 4n \\
&\Rightarrow & n^2 - n^2 + 1 - 1 + 2n - (-2n) &= 4n \\
&\Rightarrow & (n^2 + 2n + 1) - (n^2 - 2n + 1) &= 4n \\
&\Rightarrow & (n+1)^2 - (n-1)^2 &= 4n\,.
\end{aligned}$$

Musterlösung: Mit den binomischen Formeln erhalten wir

$$(n+1)^2 - (n-1)^2 = (\cancel{n^2} + 2n + \cancel{1}) - (\cancel{n^2} - 2n + \cancel{1}) = 2n - (-2n) = 4n\,.$$

3.5 Aufgabe

Löse die Gleichung

$$|x-2| = 1\,,$$

$x \in \mathbb{R}$.

3.6 Mangelhafte Lösung

Fall $x < 2$. $\Rightarrow |x-2| < 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow && -(x-2) &= 1 && \\ \Leftrightarrow && -x+2 &= 1 && \mid +x-1 \\ \Leftrightarrow && 1 &= x && \\ \Rightarrow && L_1 &= \{1\} && \end{aligned}$$

Fall $x \geq 2$. $\Rightarrow |x-2| \geq 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow && x-2 &= 1 && \mid +2 \\ \Leftrightarrow && x &= 3 && \\ \Rightarrow && L_2 &= \{3\} && \end{aligned}$$

$\Rightarrow L = L_1 \cup L_2 = \{-1, 5\}$.

3.7 Bemerkungen

Die Schreibweise $|x-2| < 0$ ist sinnfrei – ein Betrag ist nie negativ. Ihr meint $x-2 < 0$ und $|x-2| = -(x-2)$. Weiterhin sind die Implikationspfeile falsch gesetzt. Sobald ihr $|x-2| = -(x-2)$ aus $x < 2$ folgert, verliert ihr die Rückrichtung (ihr könntet also nur $L_1 \subset \{1\}$ folgern). Anschließend folgt nicht die zu untersuchende Gleichung aus der Fallannahme, sondern dass sich diese wie angegeben darstellen lässt. Ebenfalls fehlt ein erläuternder Text: Wieso erhaltet ihr diese Gleichungen für L_1 und L_2 und was sind diese Symbole überhaupt?

3.8 Lösung

Korrigierte Lösung: Fall $x < 2$, also $x - 2 < 0$:

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow && -(x-2) &= 1 && \\ \Leftrightarrow && -x+2 &= 1 && \mid +x-1 \\ \Leftrightarrow && 1 &= x && \end{aligned}$$

Zusammen mit der Fallannahme $x < 2$ erhalten wir eine erste Lösungsmenge $L_1 = \{1\}$.

Fall $x \geq 2$, also $x - 2 \geq 0$:

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow && x-2 &= 1 && \mid +2 \\ \Leftrightarrow && x &= 3 && \end{aligned}$$

Zusammen mit der Fallannahme $x \geq 2$ erhalten wir eine zweite Lösungsmenge $L_2 = \{3\}$.

Die Lösungsmenge L der Gleichung $|x-2| = 1$ erhalten wir nun als Vereinigung der Lösungsmengen für die zwei betrachteten Fälle als $L = L_1 \cup L_2 = \{1, 3\}$.

Musterlösung: Fall 1: Ist $x < 2$, so ist $x - 2 < 0$; die zu untersuchende Gleichung lautet also

$$-(x-2) = 1\,.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} & -x+2=1 && \mid +x-1 \\ \Leftrightarrow \quad & 1=x\,. \end{aligned}$$

Da $x = 1$ die Fallannahme $x < 2$ erfüllt, erhalten wir für diese Fall die Lösungsmenge $L_1 = \{1\}$.

Fall 2: Ist $x \geq 2$, so ist $x - 2 \geq 0$; die zu untersuchende Gleichung lautet also

$$x - 2 = 1\,.$$

Addieren von Zwei auf beiden Seiten liefert die äquivalente Gleichung $x = 3$. Da $x = 3$ die Fallannahme $x \geq 2$ erfüllt, erhalten wir für diesen Fall die Lösungsmenge $L_2 = \{3\}$.

Die Lösungsmenge L der Gleichung $|x - 2| = 1$ erhalten wir nun als Vereinigung der Lösungsmengen für die zwei betrachteten Fälle als $L = L_1 \cup L_2 = \{1, 3\}$.

3.9 Schlussbemerkung

Es zeigt sich schnell, dass das Ausformulieren von Sätzen mehr Platz beansprucht als das bloße Verknüpfen von Gleichungen mit Äquivalenzpfeilen. In reinen Rechenaufgaben könnt ihr daher auf lange Sätze verzichten – im letzten Beispiel also lieber die korrigierte Lösung als die Musterlösung wählen. Sobald ihr jedoch eine vollständige Induktion durchführt, eure Argumentation darlegt oder überhaupt irgendetwas anderes tut als eine (Un-)Gleichung umzuformen, tut dies in vollständigen Sätzen.