Elementare Ungleichungen

Binomische Ungleichung

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2 \,.$$

Beweis. Es gilt

$$0 \leq (\sqrt{\varepsilon}a - \tfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}b)^2 = \varepsilon a^2 - 2ab + \tfrac{1}{\varepsilon}b^2 \,.$$

□

2. Ungleichung

Seien $a, b \geq 0$. Dann gilt

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}\sqrt{a+b} \,.$$

Beweis. Es gilt

$$a + b \leq a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \,.$$

Mit der binomischen Ungleichung folgt für $\varepsilon = 1$

$$\sqrt{a}\sqrt{b} \leq \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b$$

und somit

$$a + b \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \leq 2(a+b) \,.$$

□

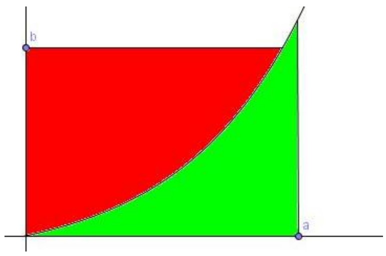
Verallgemeinerte Youngsche Ungleichung

Sei $\varphi \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ eine stetige und streng monoton wachsende Funktion mit $\varphi(0)$ und $\varphi(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$. Dann gilt für alle $a, b \geq 0$

$$ab \leq \int_0^a \varphi(x) \mathrm{d}x + \int_0^b \varphi^{-1}(x) \mathrm{d}x \,.$$

Die Gleichheit gilt genau dann, wenn $\varphi(a) = b$.

Auf einen formalen Beweis verzichten wir, jedoch lassen sich $\int_0^a \varphi(x) \mathrm{d}x$ und $\int_0^b \varphi^{-1}(x) \mathrm{d}x$ gut verbildlichen. Auch die Gleichheit im Fall $\varphi(a) = b$ ist zu erkennen.



Youngsche Ungleichung

Seien $a, b \geq 0$ und $p, q \in (1, \infty)$ so, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\,.$$

Beweis. Folgt aus der verallgemeinerten Youngschen Ungleichung mit $\varphi(x) = x^{p-1}$. □

5. Ungleichung

Sei $1 < p < \infty$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$|1 + x|^p \leq 2^{p-1}(1 + |x|^p)\,.$$

Beweis. Setze $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|^p$. Dann ist f konvex, also

$$\left|\frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right|^p = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right) \leq \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{2} + \frac{|x|^p}{2}\,.$$

Multiplikation mit 2^p liefert die Behauptung. □

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Sei $(\mathcal{H}, (\cdot\,,\cdot), |\cdot|)$ ein Hilbert-Raum. Dann gilt für alle $u, v \in \mathcal{H}$

$$|(u, v)| \leq |u||v|\,.$$

Beweis. O.B.d.A. seien $u, v \neq 0$. Definiere

$$\varphi(\lambda) = |\lambda u + v|^2 = (\lambda u + v, \lambda u + v) = \lambda^2 |u|^2 + 2\lambda(u, v) + |v|^2\,.$$

φ ist also eine quadratische Funktion und hat nach Definition entweder genau eine reelle oder zwei komplexe Nullstellen. Nach p-q-Formel gilt für die Nullstellen

$$x_1, x_2 = -\frac{(u, v)}{|u|^2} \pm \sqrt{\frac{(u, v)^2}{|u|^4} - \frac{|v|^2}{|u|^2}}\,.$$

Es muss also

$$0 \geq \frac{(u, v)^2}{|u|^4} - \frac{|v|^2}{|u|^2}$$

gelten, da sonst zwei relle Nullstellen vorhanden wären. Hieraus folgt durch Umstellen die Behauptung (für $(u, v) \in \mathbb{R}$). □

Hölder-Ungleichung

Seien $u \in L^p(a, b)$ und $L^q(a, b)$ mit $p, q \in [1, \infty]$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($p = 1 \Leftrightarrow q = \infty$). Dann gilt

$$\|uv\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}\,.$$

Beweis. O.B.d.A. seien $u, v \neq 0$.
Sei $p = \infty$. Dann ist

$$\|u\|_1 = \int_a^b |u(x)v(x)| \mathrm{d}x \leq \|u\|_\infty \int_a^b |v(x)| \mathrm{d}x \,.$$

Seien nun $p, q \in (1, \infty)$. Definiere

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x) &:= \frac{|u(x)|}{\|u\|_p} \,, \\ \tilde{v}(x) &:= \frac{|v(x)|}{\|v\|_q} \,. \end{aligned}$$

Dann ist $\|\tilde{u}\|_p = 1$ und $\|\tilde{v}\|_p = 1$ und es gilt nach der Youngschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|u\|_p \|v\|_q} \int_a^b |u(x)v(x)| \mathrm{d}x = \int_a^b |\tilde{u}(x)\tilde{v}(x)| \mathrm{d}x &\leq \int_a^b \left(\frac{|\tilde{u}(x)|^p}{p} + \frac{|\tilde{v}(x)|^q}{q} \right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{p} \|\tilde{u}\|_p^p + \frac{1}{q} \|\tilde{v}\|_q^q = 1 \,. \end{aligned}$$

□

Minkowski-Ungleichung

Seien $u, v \in L^p(a,b)$, $1 \leq p \leq \infty$. Dann gilt

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p \,.$$

Beweis. Wähle $q \in [1, \infty]$ so, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann ist $p + q = pq$ und daher $q(p-1) = p$. Es gilt

$$|u(x)+v(x)|^p = |u(x)+v(x)||u(x)+v(x)|^{p-1} \leq |u(x)||u(x)+v(x)|^{p-1} + |v(x)||u(x)+v(x)|^{p-1}$$

und somit mit der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_a^b |u(x) + v(x)|^p \mathrm{d}x &\leq \int_a^b |u(x)||u(x) + v(x)|^{p-1} \mathrm{d}x + \int_a^b |v(x)||u(x) + v(x)|^{p-1} \mathrm{d}x \\ &\leq \|u\|_p \| \left(\int_a^b |u(x) + v(x)|^{q(p-1)} \mathrm{d}x \right)^{1/q} \\ &\quad + \|v\|_p \left(\int_a^b |u(x) + v(x)|^{q(p-1)} \mathrm{d}x \right)^{1/q} \,. \end{aligned}$$

Nun wird durch die Integralterme geteilt und mit $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ folgt die Behauptung. □