Zur Vorhersage von Turnier-Ergebnissen - eine mathematische Notiz

Erhard Konrad

Berlin, September 2013

1 Einleitung

In der Online-Zeitschrift *http://www.schach-welt.de* stellt Dirk Paulsen einen neuen Ansatz zur Vorhersage von Turnier-Ergebnissen vor (Paulsen 2012). Er erläutert seine Ideen ausführlich für einen breiten Leserkreis. Im vorliegenden Beitrag wird der mathematische Aspekt des Ansatzes mit Bezug auf Resultate von Zermelo (1929) und Elo (1978) untersucht.

Paulsen beschreibt ein Verfahren zur Berechnung der Gewinnerwartung aus den Spielstärken der Kontrahenten. Dabei soll die Spielstärke eines Spielers im Vergleich zur Spielstärke eines Durchschnittsspielers bestimmt werden. Da sich die Spielstärke nicht direkt mit Hilfe der durchschnittlichen Spielstärke definieren lässt – eine solche Definition wäre zirkulär –, wird hierzu im Folgenden das Turnierergebnis eines Spielers zugrunde gelegt. Darauf aufbauend wird die Gewinnerwartung eines Spielers gegenüber einem Gegner als Funktion ihrer Spielstärken erklärt. Es wird bewiesen, dass diese Funktion eine Wahrscheinlichkeit darstellt und Eigenschaften wie Monotonie und probabilistische Transitivität hat. Am Beispiel des Großmeisterturniers *New York 1924* werden Gewinnerwartungen für ausgewählte Begegnungen mit Vorhersagen nach Zermelo und Elo verglichen.

2 Spielstärke und Gewinnerwartung

Zunächst wird die relative Spielstärke durch die Ergebnisse eines Rundenturniers definiert. Dabei wird vorausgesetzt, dass für alle Begegnungen Ergebnisse vorliegen. In der Ergebnistabelle (Kreuztabelle) sind dann alle Felder bis auf die Diagonalfelder besetzt.

Definition 1: Sei n eine natürliche Zahl, $n \geq 2$ die Anzahl der Teilnehmer eines Turniers, n-1 die Anzahl der Runden und e_a das Ergebnis (Punktezahl), das ein Spieler a erziehlt. Dann habe der Spieler a die *Spielstärke*

$$s_a = \frac{e_a}{n-1}.$$

Ein Gewinn zähle 1 Punkt. Es gilt $0 \leq e_a \leq n-1$ und somit $0 \leq s_a \leq 1$. Ein Wert der zweistelligen Funktion s_a ist eine Maßzahl auf einer normierten Absolutskala (vgl. Roberts 1978).

Die folgenden Sonderfälle können auftreten:

a) $s_a = 1$: Spieler a gewinnt alle Partien;

b) $s_a = 0$: Spieler a verliert alle Partien;

c) $s_a = \frac{1}{2}$: Spieler a erzielt die Hälfte der möglichen Punkte.

In einem Rundenturnier kann höchstens ein Spieler alle Partien gewinnen oder alle Partien verlieren. Es gilt:

Theorem 1 (Eindeutigkeit): Es gibt höchstens einen Spieler a mit $s_a = 1$, und ebenso gibt es höchstens einen Spieler a mit $s_a = 0$.

Beweis(indirekt): Es gebe einen Spieler $a' \neq a$ mit $s_{a'} = 1$. Dann folgt $s_a = s_{a'}$, und nach Definition 1

$$\frac{e_a}{n-1} = \frac{e_{a'}}{n-1}.$$

Hieraus ergibt sich $e_a = e_{a'}$. Der Spieler a und der Spieler a' können jedoch nicht die gleiche Punktezahl n-1 haben, denn a gewinnt gegen a' oder a' gewinnt gegen a. Somit hat entweder a oder a' höchstens n-2 Punkte - im Widerspruch zur Definition ihrer Spielstärke. – Der Beweis für $s_a = 0$ wird analog geführt.

Wenn ein Spieler a mindestens so stark wie ein Spieler b ist, und dieser mindestens so stark wie ein Spieler c ist, so ist a auch mindestens so stark wie c. Dies zeigt

Theorem 2 (Transitivität): Für Spieler a, b und c mit den Spielstärken s_a, s_b und s_c gilt (Abkürzungen: & für „und“ und $\Rightarrow$ für „wenn-so“)

$$s_a \geq s_b \ \&\ s_b \geq s_c \ \Rightarrow\ s_a \geq s_c.$$

Beweis: Nach Definition der Spielstärke lautet die Behauptung

$$\frac{e_a}{n-1} \geq \frac{e_b}{n-1} \ \&\ \frac{e_b}{n-1} \geq \frac{e_c}{n-1} \ \Rightarrow\ \frac{e_a}{n-1} \geq \frac{e_c}{n-1}.$$

Diese Aussage ist äquivalent mit

$$e_a \geq e_b \ \&\ e_b \geq e_c \ \Rightarrow\ e_a \geq e_c.$$

Und dies gilt wegen der Transitivität der Größer-Gleich-Beziehung für reelle Zahlen. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Zur Definition der Gewinnerwartung wird angenommen, dass jede Partie entschieden wird. Für praktische Anwendungen kann, worauf Zermelo (1929) hinweist, die folgende Fiktion benutzt werden: Es seien doppelt soviele Partien gespielt, wobei dann jede unentschiedene Partie als einfacher und jede gewonnene Partie als doppelter Gewinn angerechnet wird. Auch hier gilt: $0 \leq s_a \leq 1$.

Definition 2 (Paulsen): Seien s_a und s_b die Spielstärken der Spieler a und b. Dann sei die Erwartung, dass a gegen b gewinnt

$$p_{ab} = \frac{s_a(1 - s_b)}{s_a(1 - s_b) + s_b(1 - s_a)}.$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass $s_a \neq 0$ oder $s_b \neq 0$ sowie $s_a \neq 1$ oder $s_b \neq 1$ gilt, da sonst der Nenner Null würde.

Zermelo benutzt in seiner Arbeit (Zermelo 1929) eine Wahrscheinlichsfunktion, die in der neueren Literatur (vgl. z.B. Roberts 1979) als *Nutzenfunktion* bezeichnet wird. Mit der hier eingeführten Notation lautet diese Funktion

$$u_{ab} = \frac{s_a}{s_a + s_b}.$$

Zermelos statistischer Ansatz schließt auch Fälle ein, bei denen nicht alle Spieler ein Turnier zu Ende spielen oder bei denen Ergebnisse mehrerer Turniere kombiniert werden. Aufgrund der unvollständigen Information über die Spieler kann die relative Spielstärke nur geschätzt werden. Zermelo benutzt eine Methode, die heute in der Statistik *Maximum-Likelihood-Schätzung* genannt wird.

Im Folgenden werden zu Paulsens Funktion einige Theoreme formuliert und bewiesen.

Zunächst wird gezeigt, dass die 2-stellige Funktion p_{ab} eine Wahrscheinlchkeit darstellt. Dazu ist notwendig, dass p_{ab} nur Werte zwischen 0 und 1 annimmt. Die Wahrscheinlichkeit ist ein Maß für die Vorhersagbarkeit eines Ereignisses.

Theorem 3: Für Spieler a und b seien $s_a \neq 0$ oder $s_b \neq 0$ sowie $s_a \neq 1$ oder $s_b \neq 1$. Dann gilt

$$0 \leq p_{ab} \leq 1.$$

Beweis: Wegen $0 \leq s_a \leq 1$ und $0 \leq s_b \leq 1$ erhält man

$$\frac{s_a(1-s_b)}{s_a(1-s_b)+s_b(1-s_a)} \geq 0,$$

denn die Faktoren im Zähler und im Nenner des Bruches können nicht negativ werden. Insbesondere ist auch

$$0 \leq s_b(1-s_a).$$

Hieraus ergibt sich durch Addition von $s_a(1-s_b)$ auf beiden Seiten der Ungleichung

$$s_a(1-s_b) \leq s_a(1-s_b)+s_b(1-s_a).$$

Mit Division durch $s_a(1-s_b)+s_b(1-s_a)$ ($\neq 0$ wegen der Voraussetzungen) bekommt man

$$\frac{s_a(1-s_b)}{s_a(1-s_b)+s_b(1-s_a)} \leq 1.$$

Damit ist gezeigt, dass die Funktion p_{ab} nur Werte im abgeschlossenen Intervall [0, 1] annimmt.

Die Wahrscheinlichkeiten unverträglicher Ereignisse sind additiv, und das sichere Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit 1 (Axiome von Kolmogoroff). Es gilt:

Theorem 4: Seien p_{ab} und p_{ba} die Wahrscheinlichkeiten der unverträglichen Ereignisse „Spieler a gewinnt gegen Spieler b" und „Spieler b gewinnt gegen Spieler a". Dann gilt

$$p_{ab} + p_{ba} = 1.$$

Beweis: Nach Definition von p_{ab} und p_{ba} ergibt sich

$$\begin{aligned} p_{ab} + p_{ba} &= \tfrac{s_a(1-s_b)}{s_a(1-s_b)+s_b(1-s_a)} + \tfrac{s_b(1-s_a)}{s_b(1-s_a)+s_a(1-s_b)} \\ &= \tfrac{s_a(1-s_b)+s_b(1-s_a)}{s_a(1-s_b)+s_b(1-s_a)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Das sichere Ereignis ist hier „Spieler a gewinnt gegen Spieler b oder Spieler b gewinnt gegen Spieler a".

Nach Theorem 1 gibt es höchstens einen Spieler, der immer gewinnt. Die Gewinnerwartung für diesen Spieler ist stets 1. Es gilt:

Theorem 5: Es gebe einen Spieler a mit $s_a = 1$, und es sei b ein beliebiger Spieler. Dann gilt

$$p_{ab} = 1.$$

Beweis: Die Definition von p_{ab} liefert für $s_a = 1$

$$\begin{aligned} p_{ab} &= \tfrac{(1-s_b)}{(1-s_b)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Im folgenden Theorem geht es um eine Besonderheit von Paulsens Funktion, deren Wertebereich mit dem Wertebereich der Funktion s_a übereinstimmt. Es besagt: Die Gewinnerwartung eines Spielers gegen einen Durchschnittsspieler ist gleich der Maßzahl seiner Spielstärke.

Theorem 6: Ein Spieler a habe die Spielstärke s_a, und für einen Spieler b sei die Spielstärke $s_b = \frac{1}{2}$. Dann gilt

$$p_{ab} = s_a.$$

Beweis: Die Definition von p_{ab} liefert für $s_b = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} p_{ab} &= \tfrac{\frac{1}{2}s_a}{\frac{1}{2}s_a+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s_a} \\ &= s_a. \end{aligned}$$

Bei gleichstarken Spielern ist die Gewinnerwartung $\frac{1}{2}$. Einer der beiden Spieler wird *zufällig* gewinnen. Es gilt:

Theorem 7: Für die Spielstärken der Spieler a und b sei $s_a = s_b$. Dann gilt

$$p_{ab} = \frac{1}{2}.$$

Beweis: Durch Ersetzung von s_b durch s_a in der Definition von p_{ab} ergibt sich

$$\begin{aligned} p_{ab} &= \tfrac{s_a(1-s_a)}{s_a(1-s_a)+s_a(1-s_a)} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Das Monotonieverhalten der Gewinnerwartung ist Inhalt des folgenden Theorems. Es besagt: Wenn die Spielstärke eines Spielers a größer als die Spielstärke eines Spielers b ist, so ist auch die Gewinnerwartung von a gegen einen beliebigen Spieler c größer als die Gewinnerwartung von b gegen c.

Theorem 8 (Monotonie): Für Spieler a, b und c seien ihre Spielstärken $s_a \neq 0$ oder $s_c \neq 0$ sowie $s_a \neq 1$ oder $s_c \neq 1$, weiterhin $s_b \neq 0$ oder $s_c \neq 0$ sowie $s_b \neq 1$ oder $s_c \neq 1$. Dann gilt (Abkürzung: $\Leftrightarrow$ für „genau dann, wenn")

$$s_a \geq s_b \Leftrightarrow p_{ac} \geq p_{bc}.$$

Beweis: Nach Definition von p_{ac} und p_{bc} sowie durch algebraische Umformungen ergibt sich

$$\begin{aligned}
p_{ac} \geq p_{bc} &\Leftrightarrow \frac{s_a(1-s_c)}{s_a(1-s_c)+s_c(1-s_a)} \geq \frac{s_b(1-s_c)}{s_b(1-s_c)+s_c(1-s_b)} \\
&\Leftrightarrow s_a(1-s_c)(s_b(1-s_c)+s_c(1-s_b)) \geq s_b(1-s_c)(s_a(1-s_c)+s_c(1-s_a)) \\
&\Leftrightarrow s_a s_b - 3s_a s_b s_c + s_a s_c + 2s_a s_b s_c^2 - s_a s_c^2 \geq s_a s_b - 3s_a s_b s_c + s_b s_c + \\
&\qquad\qquad 2s_a s_b s_c^2 - s_b s_c^2 \\
&\Leftrightarrow s_a s_c - s_a s_c^2 \geq s_b s_c - s_b s_c^2 \\
&\Leftrightarrow s_a(s_c - s_c^2) \geq s_b(s_c - s_c^2) \\
&\Leftrightarrow s_a \geq s_b.
\end{aligned}$$

Ein Unterschied der Spielstärken wirkt sich nicht in jedem Einzelfall aus, sondern im Durchschnitt. So wird z.B. ein Spieler a oft gegen einen Spieler c gewinnen, wenn der Spieler a oft gegen einen Spieler b gewinnt und wenn der Spieler b oft gegen den Spieler c gewinnt. Wenn also die Gewinnerwartung eines Spielers a gegen einen Spieler b und die Gewinnerwartung des Spielers b gegen einen Spieler c größer als der Zufall sind, so ist auch die Gewinnerwartung des Spielers a gegen den Spieler c größer als der Zufall. Und wenn ein Spieler a gegen einen Spieler b und der Spieler b gegen einen Spieler c zufällig gewinnen, so gewinnt auch der Spieler a zufällig gegen den Spieler c. Es gilt:

Theorem 9 (Probabilistische Transitivität): Seien p_{ab}, p_{bc} und p_{ac} die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse „Spieler a gewinnt gegen Spieler b", „Spieler b gewinnt gegen Spieler c" und „Spieler a gewinnt gegen Spieler c". Dann gilt

$$p_{ab} \geq \frac{1}{2} \;\&\; p_{bc} \geq \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; p_{ac} \geq \frac{1}{2}.$$

Beweis: Nach Definition von p_{ab}, p_{bc} und p_{ac} ergibt sich

$$\frac{s_a(1-s_b)}{s_a(1-s_b)+s_b(1-s_a)} \geq \frac{1}{2} \;\&\; \frac{s_b(1-s_c)}{s_b(1-s_c)+s_c(1-s_b)} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$$
$$\frac{s_a(1-s_c)}{s_a(1-s_c)+s_c(1-s_a)} \geq \frac{1}{2}.$$

Durch algebraische Umformungen erhält man

$$s_a(1-s_b) \geq s_b(1-s_a) \;\&\; s_b(1-s_c) \geq s_c(1-s_b) \;\Rightarrow$$
$$s_a(1-s_c) \geq s_c(1-s_a).$$

Und hieraus durch Multiplikationen und Additionen

$$s_a \geq s_b \;\&\; s_b \geq s_c \Rightarrow s_a \geq s_c.$$

Da alle Umformungen umkehrbar sind, ist gezeigt, dass die probabilistische Transitivität für Gewinnerwartungen mit der Transitivit für Spielstärken (Theorem 2) äquivalent ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Die Relation „a gewinnt sicher gegen b" ist nicht transitiv, da nur ein Spieler die Gewinnerwartung 1 haben kann (Theorem 1).

Im folgenden Theorem werden die Gewinnerwartungen p_{ab} (nach Paulsen) und u_{ab} (Nutzenfunktion) miteinander verglichen.

Theorem 10: Für die Spielstärken der Spieler a und b sei $s_a \geq s_b$. Dann gilt

$$p_{ab} \geq u_{ab}.$$

Beweis: Nach Definition von p_{ab} und u_{ab} sowie durch algebraische Umformungen ergibt sich

$$\begin{aligned}
p_{ab} \geq u_{ab} \Leftrightarrow &\ \tfrac{s_a(1-s_b)}{s_a(1-s_b)+s_b(1-s_a)} \geq \tfrac{s_a}{s_a+s_b} \\
\Leftrightarrow &\ s_a(1-s_b)(s_a+s_b) \geq s_a(s_a(1-s_b)+s_b(1-s_a)) \\
\Leftrightarrow &\ (s_a^2 + s_a s_b - s_a^2 s_b - s_a s_b^2) \geq (s_a^2 - s_a^2 s_b + s_a s_b - s_a^2 s_b) \\
\Leftrightarrow &\ -s_a s_b^2 \geq (-s_a^2 s_b) \\
\Leftrightarrow &\ s_a^2 s_b \geq s_a s_b^2 \\
\Leftrightarrow &\ s_a \geq s_b.
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass die Gewinnerwartung p_{ab} stets mindestens so groß ist wie die Gewinnerwartung u_{ab}. Die Voraussetzung $s_a \geq s_b$ schränkt die Allgemeinheit der Behauptung nicht ein, denn bei $s_a < s_b$ ist ein analoges Ergebnis für die Verlusterwartung herleitbar.

Die Beweisführung kann zur Berechnung der Differenz zwischen p_{ab} und u_{ab} modifiziert werden. Man erhält

$$p_{ab} - u_{ab} = \frac{s_a s_b(s_a - s_b)}{(s_a + s_b)((s_a + s_b - 2s_a s_b)}.$$

Die Darstellung der Differenz als Funktion der Variablen s_a und s_b lässt keine einfache Deutung erkennen.

3 Anwendung auf das Turnier „New York 1924"

Zermelo wendet seine Erkenntnisse auf das Großmeister-Turnier *New York 1924* an (vgl. Alekhine 2009). Er bestimmt die relativen Spielstärken aller Teilnehmer aufgrund ihrer Turnier-Ergebnisse (Zermelo 1929). Im Folgenden werden am Beispiel dieses Turniers Definitionen von Gewinnerwartungen verglichen.

In Tabelle 1 sind 5 Teilnehmer des Turniers aufgeführt, nämlich die drei Ranghöchsten Em. Lasker, Capablanca und Aljechin sowie Maroczy, der die Hälfte der möglichen Punkte erzielt, und der Rangniedrigste Janowski. Beim Vergleich werden die Spielstärken nach Definition 1, nach Zermelo und nach Elo berücksichtigt. Zermelos Maßzahlen sind auf 100 normiert. Bei den Elo-Zahlen handelt es sich jeweils um den besten 5-Jahres-Durchschnitt (vgl. Elo 1978).

Tabelle 1 Spielstärken von 5 Teilnehmern des Turniers *New York 1924*

Rang	Spieler	Punkte	Spielstärke s_a	Zermelo-Zahl	Elo-Zahl
1	Em. Lasker	16	0,80	26,4	2720
2	Capablanca	14,5	0,73	18,4	2725
3	Aljechin	12	0,60	10,7	2690
6	Maroczy	10	0,50	7,12	2620
11	Janowski	5	0,25	2,43	2570

Aufgrund der Spielstärken werden Vorhersagen für 10 Begegnungen gemacht (Tabelle 2). Es wird jeweils die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass der Erstgenannte gegen den Zweitgenannten gewinnt (Gewinnerwartung). Zu beachten ist, dass die Erwartung nach Elo auf einem 5-Jahres-Zeitraum beruht, während sich die übrigen Erwartungen auf Momentaufnahmen (1 Turnier) stützen.

Tabelle 2 Gewinnerwartungen für Begegnungen von Spielern des Turniers *New York 1924*

Gewinnerwartungen	p_{ab} (Paulsen)	u_{ab}	u^*_{ab} (Zermelo)	p^*_{ab}	Elo
Lasker - Capablanca	0,60	0,52	0,59	0,61	0,49
Lasker - Aljechin	0,73	0,57	0,71	0,75	0,54
Capablanca - Aljechin	0,64	0,55	0,63	0,65	0,55
Lasker - Maroczy	0,80	0,62	0,79	0,82	0,64
Lasker - Janowski	0,92	0,76	0,92	0,94	0,70
Capablanca - Maroczy	0,73	0,59	0,72	0,75	0,64
Capablanca - Janowski	0,89	0,74	0,88	0,90	0,71
Aljechin - Maroczy	0,60	0,55	0,61	0,60	0,60
Aljechin - Janowski	0,82	0,71	0,81	0,83	0,66
Maroczy - Janowski	0,75	0,67	0,75	0,75	0,57
Mittelwert	0,75	0,63	0,74	0,76	0,61

Tabelle 2 zeigt, dass sich die Erwartungen nach den 5 verschiedenen Berechnungsverfahren monoton zueinander verhalten. Ist also nach einem Verfahren die Erwartung für eine Begegnung B_1 größer als für eine Begegnung B_2, so gilt dies auch für die übrigen 4 Verfahren. Ein Sonderfall scheint die Begegnung Maroczy - Janowski mit $u^*_{ab} = p^*_{ab} = 0,75$ zu sein. Berücksichtigt man jedoch bei der Berechnung drei Stellen nach dem Komma, so erhält man $u^*_{ab} = 0,746$ und $p^*_{ab} = 0,755$ (Erklärung von u^*_{ab} und p^*_{ab} s.u.).

Die Tabelle 2 legt weiterhin die Hypothese nahe, daß die Erwartungen nach Paulsen (p_{ab}) und Zermelo (u^*_{ab}) bis auf kleine Abweichungen übereinstimmen. Bemerkenswert ist, dass dies ebenso für die Erwartung u_{ab} (Nutzenfunktion) und die Erwartung nach Elo gilt. Es erhebt sich allerdings die Frage, ob diese Hypothesen bei einer größeren Stichprobe bestätigt würden.

Die Funktion p_{ab} läßt sich in modifizierter Form mit Zermelos Spielstärke-Zahlen als Variablen benutzen:

$$p^*_{ab} = \frac{s_a(100 - s_b)}{s_a(100 - s_b) + s_b(100 - s_a)}.$$

Auch hier ist bemerkenswert, dass sich p^*_{ab} und u^*_{ab} nur schwach unterscheiden. Für p^*_{ab} gilt Theorem 5 nicht, wie die Begegnungen mit Maroczy (dem Durchschnittsspieler des Turniers) zeigen. Z.B. bekommt man für die Begegnung Lasker - Maroczy $s_a = 26,4$, aber $p^*_{ab} = 0,82$.

Die Funktion p_{ab} ist nicht mit Elo-Zahlen als Variablen verwendbar, denn die Elo-Skala hat keinen Anfangs- und keinen Endpunkt wie die Absolutskalen nach Definition 1 und bei Zermelo. Die Elo-Skala ist eine Intervall-Skala, die invariant gegenüber Transformationen der Form $\alpha x + \beta$ mit $\beta > 0$ ist (vgl. Roberts 1978). Die Differenzen der Elo-Zahlen sind bedeutsam, nicht jedoch die einzelnen Zahlen. Die Wahl der Zahl 2000 als Bezugspunkt auf der Elo-Skala ist willkürlich, das Hinzufügen weiterer Zahlen ist dann nicht mehr willkürlich, da bedeutsame Differenzen entstehen (vgl. Elo 1978).

4 Schlußbemerkungen

Die Definitionen der Gewinnerwartung von Zermelo und Elo sind mit einem statistischen Ansatz verbunden. Im vorliegenden Beitrag ist die Gewinnerwartung nach Paulsen nur für den Fall der vollständigen Information definiert (Definition 2). Ihre Einbettung in einen statistischen Rahmen scheint möglich zu sein. Die in der Praxis wichtige Fortschreibung von Maßzahlen für die Spielstärke (Definition 1) könnte über die Akualisierung der Kreuztabelle bewerkstelligt werden. Während diese Vorgehensweise für die Ergebnisse vieler oder sogar aller Turniere (Welt-Kreuztabelle) im mathematischen Gedankenexperiment keine besonderen Probleme aufwirft, kann es in einem praktischen Bewertungssystem vorteilhaft sein, eine andere semantisch äquivalente Darstellung der Ergebnisse zu wählen.

Literatur

Alekhine, Alexander: *New York 1924*, Russell Enterprises, Milford (USA) 2009.

Elo, Arpad E.: *The Rating of Chess Players, Past & Present*, Batsford, London 1978.

Paulsen, Dirk: *Spielstärke Maßzahlen*, http://www.schach-welt.de/BLOG/Blog/SpielstärkeMaßzahlen, 24. Februar 2012.

Roberts, Fred S.: *Measurement Theory*, Addison-Wesley, London 1979.

Zermelo, Ernst: *Die Berechnung der Turnier-Ergebnisse als ein Maximumproblem der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Mathematische Zeitschrift, 1929, 29 (1), 436-460.