

# Topologische Algebra

Ché Netzer

26. April 2014



# Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	1
1	Topologische Gruppen	3
2	Topologische Ringe und Körper	8
3	Topologische Vektorräume und Algebren	10
	Literatur	13



## 0 Einleitung

Wir wollen algebraische Strukturen untersuchen, die außerdem eine topologische Struktur tragen. Ein Hauptgrund dazu ist es, zu sehen, wie Topologie und Algebra in dieser Theorie zusammenfließen. Auch werden wir auf wichtige Anwendungen stoßen. Dabei sind besonders die topologischen Gruppen und topologischen Vektorräume von Bedeutung.

Bevor wir mit der eigentlichen Mathematik beginnen, wollen wir unser Vorhaben zusammenfassen: Wir werden topologische Gruppen, Ringe, Körper, Vektorräume und Algebren definieren. Alle fünf Objekte sind nach dem gleichen Prinzip definiert: Die algebraischen Verknüpfungen seien stetig. Während wir kurz einige Eigenschaften dieser Objekte nennen und Beispiele liefern, sind wir stets bemüht, verschiedene Bereiche der Mathematik zu berühren. Neben der Algebra und der Topologie werden wir beispielsweise mit Funktionalanalysis, Differentialgeometrie und abstrakter harmonischer Analysis zu tun haben. Nach der kurzen Untersuchung besagter Strukturen kommen wir nämlich zu einigen Anwendungen und besonders interessanten Fällen. Wir lernen Haar-Maße auf lokalkompakten Gruppen kennen, untersuchen Lie-Gruppen und erwähnen Anwendungen topologischer Vektorräume. Auch werden wir verschiedene Konzepte der Fourier-Transformation vereinigen.

Wo wir sowieso schon beim Vereinigen von Konzepten sind, können wir auch eine allgemeine Umgebung für Morphismen vorstellen. Aus der linearen Algebra erinnern wir uns an Definitionen wie „Ein Homomorphismus, welcher Epimorphismus und Monomorphismus ist, heißt Isomorphismus. Ein Isomorphismus, welcher auch ein Endomorphismus ist, heißt Automorphismus“. Solche Homomorphismen kennen wir für Gruppen, Vektorräume, Ringe, Algebren, Monoide, Körper, Moduln etc. Zwischen topologischen Räumen gibt es Homöomorphismen, zwischen Mannigfaltigkeiten Diffeomorphismen. Und auf Riemannschen Flächen sprechen wir wieder von Automorphismen. Im Kontext topologischer Gruppen wollen wir als Homomorphismus einen stetigen Gruppenhomomorphismus bezeichnen. Um solche Konzepte zu vereinheitlichen, führen wir an dieser Stelle die Kategorien ein.

**Definition 0.1.** Eine *Kategorie*  $\mathcal{C}$  besteht aus einer Klasse  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  von *Objekten* und einer Klasse von *Morphismen*. Letztere besteht dabei aus paarweise disjunkten Mengen  $\text{Mor}(A, B)$  für Objekte  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , für welche Verknüpfungen

$$\text{Mor}(B, C) \times \text{Mor}(A, B) \rightarrow \text{Mor}(A, C), (g, f) \mapsto g \circ f$$

existieren, wobei  $A, B, C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ . Weiterhin soll für jedes Objekt  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  ein Identitätselement  $\text{id}_A \in \text{Mor}(A, A)$  existieren, welches bezüglich der oben genannten Verknüpfungen rechts- und linksneutral sei.

Wie die Notation suggeriert, sind die Morphismen dabei meist Abbildungen und für  $f \in \text{Mor}(A, B)$  schreibt man  $f: A \rightarrow B$ .

*Beispiel 0.2.* Es gibt genügend Beispiele, von denen wir bereits einige genannt haben.

Objekte	Morphismen
(Alle) Mengen	Alle Abbildungen
Gruppen	Gruppenhomomorphismen
Vektorräume	Vektorraumhomomorphismen
Ringe	Ringhomomorphismen
Algebren	Algebrenhomomorphismen
Topologische Räume	stetige Abbildungen
Mannigfaltigkeiten	glatte Abbildungen
Riemannsche Flächen	holomorphe Abbildungen
Normierte Räume	stetige lineare Abbildungen
Topologische Räume	Homotopieklassen stetiger Abbildungen

Später werden wir in den Kategorien topologischer Gruppe, Ring etc. arbeiten. Die Morphismen werden stetige Gruppen/Ring/ ... -Homomorphismen sein. Wir wollen jedoch nur kurz erläutern, weshalb wir diverse Dinge (Homo-)Morphismus nennen, und uns nicht weiter mit Kategorien beschäftigen.

## Literatur

- [Dieu92] J. Dieudonné, *Grundzüge der modernen Analysis. Band 2*, Vieweg (1992)
- [Loom53] L. H. Loomis, *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis*, D. Van Nostrand Company (1953)
- [Pont46] L. Pontrjagin, *Topological Groups*, Princeton University Press (1946)
- [Rudi62] W. Rudin, *Fourier Analysis on Groups*, John Wiley & Sons (1962)
- [Warn93] S. Warner, *Topological Rings*, Elsevier (1993)