Topologische Vektorräume und Distributionen

Ché Netzer

26. Juni 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Topologische Vektorräume

Wir wollen zunächst grundlegende Definitionen und Begriffe erarbeiten und einige Beispiele geben. Natürlich möchten wir dazu definieren, was ein topologischer Vektorraum ist. Dazu sei eine zunächst nicht näher bestimmte Menge gegeben, auf welcher eine Vektorraum-Struktur und eine topologische Struktur vorhanden seien – also ein Vektorraum mit einer Topologie. Die Untersuchung solcher Objekte würde jedoch kaum mehr hervorbringen als die getrennte Untersuchung von Vektorräumen und topologischen Räumen. Um beide Strukturen sinnvoll zu vereinen, wollen wir eine gewisse Kompatibilität fordern. Doch es gibt nur eine naheliegende Methode dies zu tun: Eine Vektorraum-Struktur erlaubt uns, über Addition, Subtraktion (Bilden von additiv inversen Vektoren) und Skalarmultiplikation zu sprechen. Eine topologische Struktur erlaubt, von Stetigkeit zu sprechen. Fordern wir also, dass die drei genannten Verknüpfungen stetig seien! Dabei stellen wir fest, dass die Stetigkeit der Subtraktion sich bereits aus der Stetigkeit von Addition und Skalarmultiplikation ergibt.

Definition 1.1. Ein *topologischer Vektorraum* über dem Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ist eine Menge E, welche zugleich eine Vektorraum-Struktur mit Grundkörper $\mathbb{K}$ und eine topologische Struktur besitzt, so dass die Addition

$$E \times E \to E\,,\ (x, y) \mapsto x + y$$

und die Skalarmultiplikation

$$\mathbb{K} \times E \to E\,,\ (\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

stetig sind. Wir sagen dann auch, dass diese beiden Strukturen *kompatibel* sind.

Natürlich sind dabei $E \times E$ und $\mathbb{K} \times E$ mit der Produkttopologie versehen und $\mathbb{K}$ mit der Standardtopologie.

Bemerkung 1.2. Viele Autoren fordern von einem topologischen Vektorraum außerdem die Hausdorff-Eigenschaft.

Übungsaufgabe 1.1. Es sei E ein topologischer Vektorraum und $x_0 \in E$, $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Zeige, dass die Abbildungen $x \mapsto x + x_0$, $x \mapsto \lambda x$, $x \in E$, Homöomorphismen von E auf sich selbst sind.

Übungsaufgabe 1.2. Zeige, dass die diskrete Topologie auf $E \neq \{0\}$ mit der Vektorraum-Struktur niemals kompatibel ist, die indiskrete hingegen immer.

Nun stellen wir fest, dass jeder normierte Raum ein topologischer Vektorraum ist. Dazu sei die Topologie natürlich von den offenen Kugeln erzeugt. Die Addition ist als lineare Abbildung von $E \times E$ nach E nämlich mit

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| = \|(x, y)\|_1$$

stetig und die bilineare Skalarmultiplikation mit

$$\|\lambda x\| \leq |\lambda| \|x\|\,.$$

Natürlich würden wir uns hier mit einer sehr langweiligen Theorie beschäftigen, gäbe es keine weiteren Beispiele. Glücklicherweise gibt es genügend (wichtige) Beispiele für topologische Vektorräume, deren Topologie nicht durch eine Norm induziert werden kann.

Und tatsächlich kennen wir bereits welche: Die schwache und die schwache* Topologie auf einem normierten Raum. Im unendlichdimensionalen Fall sind beide nicht metrisierbar (man zeigt, dass sie nicht dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügen; siehe Banachraum-Theorie). Etwas leichter sieht man, dass sie nicht von einer Norm abstammen können, denn jede in diesen Topologien offene Umgebung der Null enthält einen endlichen Schnitt von Kernen stetiger linearer Funktionale und ist damit unbeschränkt in jeder denkbaren Norm.

Ein weiteres wichtiges Beispiel, welches grundlegend für die Distributionentheorie ist, bildet der Raum $\mathscr{D}(\Omega)$ von Testfunktionen auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dies ist der Raum $C_c^\infty(\Omega)$ (auch $C_0^\infty(\Omega)$) aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf Ω mit kompakten Träger (Testfunktionen), welcher um eine Topologie bereichert wurde. Und auch der Raum $C^\infty(\Omega)$ mag von Interesse sein. Auf diesem wollen wir etwa die Topologie so wählen, dass Folgenkonvergenz gleichbedeutend mit der gleichmäßigen Konvergenz aller Ableitungen auf Kompakta ist. Doch auch ohne dies genauer zu fassen, stellen wir fest, dass eine solche Beschreibung niemals ausreichen wird, eine Topologie zu definieren: *Eine Topologie ist nicht durch Folgenkonvergenz charakterisiert.* Man denke etwa an den Raum ℓ_1, in welchem schwache und starke Konvergenz von Folgen übereinstimmen, die schwache Topologie aber dennoch von der Normtopologie verschieden ist.

Stattdessen können wir Topologien durch Angabe einer (Sub-)Basis angeben, wie es bei der schwachen Topologie getan wurde. Ein anderer Blickwinkel auf die Definition der schwachen Topologie auf einem normierten Raum X ist derjenige, dass sie durch die Familie von Halbnormen $x \mapsto |x^* x|$, $x^* \in X^*$, erzeugt wird. Wir werden uns mit solchen Familien von Halbnormen später beschäftigen und sehen, dass Topologien, die durch eine *abzählbare* Familie von Halbnormen erzeugt werden, metrisierbar sind. Damit sind wir bereits bei einer weiteren Möglichkeit, Topologien zu definieren: Durch Angabe einer Metrik. Dies ist wohl der einfachste Weg, weshalb wir ihn gleich vorführen möchten.

Beispiel 1.3. Für $p > 0$ sei $L^p(0,1)$ der Raum der messbaren Funktionen f auf $[0,1]$ mit Werten in $\mathbb{K}$ (bzw. ihrer Äquivalenzklassen), für welche

$$\int_0^1 |f(x)|^p \, \mathrm{d}x < \infty \,.$$

Gerne darf das Bild auch ein Banach-Raum und das Urbild ein endlicher Maßraum sein, aber wir begnügen uns mit Funktionen $[0,1] \to \mathbb{K}$. Nun ist bekanntlich

$$\|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(x)| \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}$$

eine Norm auf $L^p(0,1)$, welche für $p = 2$ sogar von einem Skalarprodukt induziert wird. Für $p < 1$ wird es spannender: Obiger Ausdruck genügt nicht mehr der Dreiecksungleichung, die „Einheitskugel“ ist nicht mehr konvex. Wir zeichnen einige solcher „Kugeln“ in $\mathbb{R}^2$ für verschiedene Werte von p.

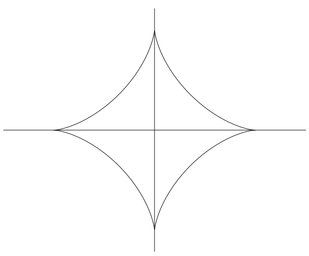

Abbildung 1: $p = \frac{2}{3}$

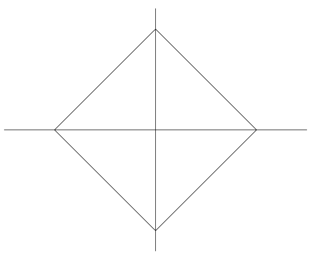

Abbildung 2: $p = 1$

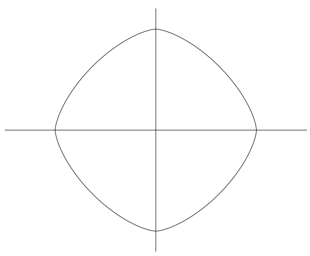

Abbildung 3: $p = \frac{3}{2}$

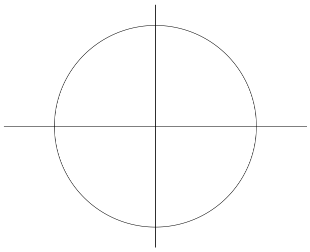

Abbildung 4: $p = 2$

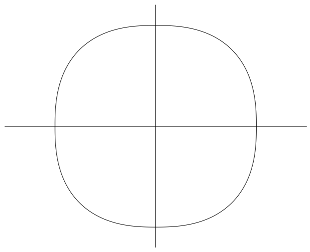

Abbildung 5: $p = \frac{5}{2}$

Allerdings ist

$$d(f,g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)|^p \,\mathrm{d}x$$

für $0 < p < 1$ eine Metrik, womit $L^p(0,1)$ zum metrischen Raum wird. Man beobachte für $f \in L^p(0,1)$, $\varepsilon > 0$ und $\tilde{\varepsilon} := \varepsilon^p$ auch

$$\{g \in L^p(0,1) : d(f,g) < \tilde{\varepsilon}\} = \left\{ g \in L^p(0,1) : \left(\int_0^1 |f(x) - g(x)| \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \right\} .$$

Man überprüft leicht, dass Addition und Skalarmultiplikation bezüglich dieser Metrik stetig sind; $L^p(0,1)$ ist also ein topologischer (metrischer/metrisierbarer) Vektorraum. Weiterhin ist $L^p(0,1)$ vollständig und die Metrik ist translationsinvariant, d. h. $d(f+h, g+h) = d(f,g)$ für alle $f,g,h \in L^p(0,1)$. Daher wird dieser Raum gelegentlich als *F-Raum* bezeichnet. Diese Bezeichnung für einen topologischen Raum, dessen Topologie durch eine vollständige translationsinvariante Metrik induziert werden kann, wollen wir jedoch nicht verwenden, um keine Verwechslungen mit Fréchet-Räumen zu verursachen, welche außerdem *lokalkonvex* sein sollen. Letzteres ist eine Eigenschaft, welche $L^p(0,1)$ fehlt. Wäre dies der Fall, könnten wir übrigens die folgende faszinierende Feststellung nicht machen: *Auf $L^p(0,1)$, $0 < p < 1$, existieren keine stetigen linearen Funktionale außer dem Nullfunktional.* Mit anderen Worten hat $L^p(0,1)$ einen trivialen Dualraum.

Um dies zu zeigen, nehmen wir an, es gäbe ein solches stetiges Funktional $\varphi\colon L^p(0,1) \to \mathbb{K}$ mit $\varphi \neq 0$. Dann könnten wir ein $f_0 \in L^p(0,1)$ mit $\varphi(f_0) = 1$ finden. Nun ist

$$t \mapsto \int_0^t |f_0(x)|^p \,\mathrm{d}x ,$$

$t \in [0,1]$, stetig und wir finden ein $t_0 \in [0,1]$ mit

$$\int_0^{t_0} |f_0(x)|^p \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^1 |f_0(x)|^p \,\mathrm{d}x = \int_{t_0}^1 |f_0(x)|^p \,\mathrm{d}x .$$

Mit $f_0 = \mathbb{1}_{[0,t_0)}\, f_0 + \mathbb{1}_{[t_0,1]}\, f_0$ ist o. B. d. A. $\varphi(\mathbb{1}_{[0,t_0)}\, f_0) \geq \frac{1}{2}$ und wir setzen $f_1 := 2\, \mathbb{1}_{[0,t_0)}\, f_0$, so dass $\varphi(f_1) \geq 1$. Insbesondere ist

$$\int_0^1 |f_1(x)|^p \,\mathrm{d}x = 2^p \int_0^{t_0} |f_0(x)|^p \,\mathrm{d}x = 2^{p-1} \int_0^1 |f_0(x)|^p \,\mathrm{d}x .$$

Induktiv erhalten wir eine Folge $(f_n) \subset L^p(0,1)$ mit $\varphi(f_n) \geq 1$, aber

$$d(f_n, 0) = \int_0^1 |f_n(x)|^p \,\mathrm{d}x = 2^{n(p-1)} \int_0^1 |f_0(x)|^p \,\mathrm{d}x .$$

Nun endlich verwenden wir $p < 1$ und erhalten $f_n \to 0$, obwohl $\varphi(f_n)$ nicht gegen Null geht.

Wir wollen uns nun damit beschäftigen, die Topologie eines topologischen Vektorraums zu verstehen und zu beschreiben. Allgemein kann eine Topologie natürlich durch Umgebungssubbasen (Umgebungen eines Punktes, so dass jede Umgebung einen Schnitt dieser Mengen) beschrieben werden. Da Translationen in topologischen Vektorräumen Homöomorphismen sind, brauchen wir jedoch nur Nullumgebungssubbasen zu betrachten. Bald werden wir herausfinden, welche Eigenschaften wir von einem Mengensystem fordern müssen, damit es eine Nullumgebungssubbasis einer Vektorraum-Topologie bildet. Zuvor sind jedoch zwei Definitionen nötig.

Definition 1.4. Es sei E ein Vektorraum.

(i) Eine Menge $A \subset E$ heißt *absorbierend*, falls zu jedem $x \in E$ ein $r > 0$ existiert, so dass $\lambda x \in A$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| < r$.

(ii) Eine Menge $A \subset E$ heißt *balanciert*, falls mit $x \in E$ auch αx für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ mit $|\alpha| \leq 1$ gilt.

Außerdem stellen wir folgendes fest: Ist $V \subset E$ eine Nullumgebung, so gibt es eine weitere Umgebung $U \subset E$ der Null, so dass $U + U \subset V$, denn die Addition ist stetig. Es ließe sich nun zeigen, dass in jedem topologischen Vektorraum eine Nullumgebungssubbasis $\mathfrak{U}$ existiert, so dass alle $U \in \mathfrak{U}$ absorbierend und balanciert sind und zu jeder Menge $V \in \mathfrak{U}$ dieser Basis ein $U \in \mathfrak{U}$ mit $U + U \subset V$ existiert. Wir zeigen stattdessen eine gewisse Umkehrung dieser Aussage.

Satz 1.5. *Es sei E ein Vektorraum und $\mathfrak{U}$ ein System von absorbierenden, balancierten Mengen, so dass für jedes $V \in \mathfrak{U}$ ein $U \in \mathfrak{U}$ mit $U + U \subset V$ existiert. Dann gibt es genau eine mit der Vektorraum-Struktur verträgliche Topologie auf E, bezüglich derer $\mathfrak{U}$ eine Nullumgebungssubbasis ist.*

Beweis. Natürlich haben wir nur eine sinnvolle Möglichkeit, diese Topologie zu definieren: Für $x \in E$ sei $x + \mathfrak{U}$ eine Umgebungssubbasis. Es bleibt die Kompatibilität mit der linearen Struktur zu zeigen. Es sei dazu $(x_0, y_0) \in E \times E$ und wir wollen zeigen, dass die Addition in diesem Punkte stetig ist. Ist aber $V \in \mathfrak{U}$, also $x_0 + y_0 + V$ eine Umgebung von $x_0 + y_0$, so finden wir $U \in \mathfrak{U}$ mit $U + U \subset V$, also $x_0 + U + y_0 + U \subset x_0 + y_0 + V$.

Nun zur Stetigkeit der Multiplikation, für welche $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{K} \times E$ gegeben sei. Zu $V \in \mathfrak{U}$ wähle wieder $U \in \mathfrak{U}$ mit $2U \subset U + U \subset V$. Da dieses U absorbierend ist, können wir ein ε finden, so dass wir für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ die Beziehung $(\lambda - \lambda_0)x_0 \in U$ erhalten. Induktiv finden wir sogar für beliebig großes $n \in \mathbb{N}$ ein $W \in \mathfrak{U}$ mit $nW \subset W + \cdots + W \subset U$ und können n größer als $|\lambda_0| + \varepsilon$ wählen. Ist nun $x \in x_0 + W$ und $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, so ist

$$\lambda(x - x_0) \in \lambda W \subset (|\lambda_0| + \varepsilon)W \subset U\,,$$

also

$$\lambda x = \lambda_0 x_0 + \lambda(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)x_0 \in \lambda_0 x_0 + U + U \subset \lambda_0 x_0 + V\,.$$

□

Dies bietet uns nun eine weitere Möglichkeit, Topologien auf Vektorräumen einzuführen.

Beispiel 1.6. Auf einem normierten Raum X liefert uns das System aller Mengen

$$\{x \in X : |x^* x| < \varepsilon\}$$

mit $x^* \in X^*$ und $\varepsilon > 0$ bekanntlich die schwache Topologie.

Beispiel 1.7. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist $C(\Omega)$ bekanntlich kein (auf natürliche Weise) normierter Raum, wir können nun aber eine Topologie auf ihm definieren, welche wir aus den Mengen

$$\left\{ f \in C(\Omega) : \sup_{x \in K} |f(x)| < \varepsilon \right\}$$

für alle $\varepsilon > 0$ und Kompakta $K \subset \Omega$ gewinnen. Die entstehende Topologie ist die der *kompakten Konvergenz.*

Beispiel 1.8. Ähnlich können wir für den nun zu definierenden Raum $\mathscr{D}(K)$ vorgehen: Dabei ist K eine kompakte Menge in $\mathbb{R}^n$ und der Vektorraum $\mathscr{D}(K)$ bestehe aus allen beliebig oft differenzierbaren Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$, deren Träger in K enthalten ist.[1] Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $\varepsilon > 0$ betrachten wir die Menge aller $f \in \mathscr{D}(K)$ mit $\sup_{x \in K} |D^\alpha f| < \varepsilon$. Aus solchen Mengen erhalten wir die Topologie von $\mathscr{D}(K)$. Konvergenz in dieser Topologie bedeutet also die gleichmäßige Konvergenz und gleichmäßige Konvergenz aller Ableitungen.

Bevor wir jedoch weitere Beispiele angeben, wollen wir eine weitere Methode abwarten, Vektorraum-Topologien zu beschreiben. Wie wir bereits bei der schwachen Topologie angedeutet haben, wird dies nämlich die Verwendung von Halbnormen sein. Damit werden wir lokalkonvexe topologische Vektorräume erhalten, mit denen wir uns im nachfolgenden Kapitel beschäftigen. Zunächst widmen wir uns jedoch einigen Aussagen über allgemeine topologische Vektorräume.

Beschäftigen wir uns beispielsweise kurz mit Unterräumen, Quotienten und hausdorffschen topologischen Vektorräumen. Wie erstere zusammenhängen, ist klar. Wir wollen zeigen, dass wir zu einem gegebenen topologischen Vektorraum E den Quotienten $E/\overline{\{0\}}$ als neuen topologischen Vektorraum erhalten, welcher sogar hausdorffsch ist.

Zunächst also zu Unterräumen:

Lemma 1.9. *Ist E ein topologischer Vektorraum und $F \subset E$ ein Unterraum, so ist auch F mit der induzierten Topologie ein topologischer Vektorraum.*

Beweis. Klar. □

Übungsaufgabe 1.3. Zeige, dass offene Unterräume eines topologischen Vektorraumes bereits der ganze Raum sind.

Übungsaufgabe 1.4. Zeige, dass der Abschluss eines Unterraumes eines topologischen Vektorraumes wieder ein Unterraum ist.

Ist nun E ein topologischer Vektorraum und $F \subset E$ ein Unterraum, so können wir – zunächst rein algebraisch – den Quotientenraum E/F definieren. Auf diesem haben wir jedoch die übliche Topologie, welche man durch eine Projektion wie hier die kanonische $\pi\colon E \to E/F$ gewinnt: Eine Menge in E/F heißt offen, wenn ihr Urbild unter π offen ist. Dies ist gerade die feinste Topologie auf E/F, mit der π stetig ist. Nachdem wir das algebraische Objekt E/F mit einer Topologie versehen haben, bleibt die Kompatibilität zu überprüfen.

Übungsaufgabe 1.5. Zeige, dass E/F tatsächlich ein topologischer Vektorraum ist.

Wir gelangen nun zur Charakterisierung hausdorffscher Quotientenräume und benötigen nur noch ein Lemma.

[1] Man mache sich kurz klar, weshalb dies nicht einfach der Raum aller glatten Funktionen auf K ist.

Lemma 1.10. *Ein topologischer Vektorraum E ist genau dann hausdorffsch, wenn für jedes* $0 \neq x \in E$ *eine Nullumgebung existiert, welche* x *nicht enthält.*

Beweis. Für $x \neq 0$ sei V eine o. B. d. A. balancierte Umgebung der Null, welche x nicht enthält, und U eine Nullumgebung mit $U+U \subset V$. Dann sind $U \ni 0$ und $x+U \ni x$ disjunkt, denn gäbe es $y \in U \cap (x+U)$, so wäre auch $y - x \in U$, also $x = y - (y - x) \in U + U \subset V$. Dass wir andere Punkte durch disjunkte Umgebungen trennen können, ergibt sich durch Translation. □

Insbesondere ist E genau dann hausdorffsch, wenn $\{0\}$ abgeschlossen ist.

Satz 1.11. *Es sei* E *ein topologischer Vektorraum und* $F \subset E$ *ein Unterraum. Dann ist* E/F *genau dann hausdorffsch, wenn* F *abgeschlossen ist.*

Beweis. Das Komplement von $\{0\} \subset E/F$ ist genau dann offen, wenn das Urbild in E offen ist. Dieses Urbild ist jedoch das Komplement von F. □

Korollar 1.12. *Ist* E *ein topologischer Vektorraum, so ist der Quotientenraum* $E/\overline{\{0\}}$ *hausdorffsch.*

Auf diese Weise können wir einem topologischen Vektorraum also einen *hausdorffschen* topologischen Vektorraum zuweisen.

Blicken wir auf die obigen Aussagen zurück, so erinnern wir uns, dass die Quotientenbildung bezüglich eines abgeschlossenen Unterraums auch bei Banach-Räumen von Bedeutung war. Dies hatte mit dem Begriff der Vollständigkeit zu tun und wir fragen uns, ob wir auch von vollständigen topologischen Vektorräumen sprechen können.

Definition 1.13. Eine Folge $(x_n) \subset E$ in einem topologischen Vektorraum E heißt *Cauchy-Folge*, falls die doppelt indizierte Folge $(x_n - x_m)$ eine Nullfolge ist.

Ist nun jede Cauchy-Folge konvergent, so können wir E als *folgen*vollständig bezeichnen. Wir wissen jedoch schon, dass Folgen nicht ausreichen, um eine Topologie zu beschreiben: Folgen sind stets nur abzählbar, aber nicht jede Topologie muss sich durch abzählbar viele Informationen beschreiben lassen. Als Lösung dieses Problems erweitert man die Indexmenge $\mathbb{N}$ einer Folge auf eine beliebige gerichtete Menge.

Definition 1.14. Eine *gerichtete Menge* ist eine Menge I, welche mit einer reflexiven und transitiven Relation $\leq$ versehen ist, so dass es für alle $i_1, i_2 \in I$ ein $j \in I$ mit $i_1 \leq j$ und $i_2 \leq j$ gibt (je zwei Elemente besitzen ein gemeinsames größeres Element).

Ein *Netz* $(x_i)_{i \in I}$ in einer Menge X ist eine Abbildung $I \to X$, $i \mapsto x_i$ von einer gerichteten Menge I nach X.

Die natürlichen Zahlen bilden offenbar eine gerichtete Menge, weshalb jede Folge ein Netz ist.

Für Netze führen wir nun einen Konvergenzbegriff ein.

Definition 1.15. Ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ in einem topologischen Vektorraum E heißt *konvergent gegen* $x \in E$, falls es für jede Umgebung $U \ni x$ von x ein $i_0 \in I$ gibt, so dass $x_i \in U$ für alle $i \geq i_0$[2]. Wir schreiben dann $x_i \to x$ bzw. $\lim x_i = x$.

[2] Dies ist natürlich als $i_0 \leq i$ zu verstehen.

Wir können Abgeschlossenheit, Stetigkeit etc. mit Netzen so beschreiben, wie wir es mit Folgen in metrischen Räumen konnten, obwohl wir nur n durch i und $\mathbb{N}$ durch I ersetzt haben. Und genauso verallgemeinern wir auf Cauchy-Netze.

Definition 1.16. Ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ in einem topologischen Vektorraum heißt *Cauchy-Netz*, falls für jede Nullumgebung U ein Index $i_0 \in I$ mit $x_i - x_j \in U$ für $i, j \geq i_0$ existiert. Konvergiert jedes Cauchy-Netz, so heißt der topologische Vektorraum *vollständig*.

Auf die offensichtliche Weise definiert man Vollständigkeit von Teilmengen topologischer Vektorräume.

Übungsaufgabe 1.6. Es sei E ein vollständiger, hausdorffscher topologischer Vektorraum. Zeige, dass eine Teilmenge $A \subset E$ genau dann vollständig ist, wenn sie abgeschlossen ist.

Wir werfen einen weiteren Blick zurück und betrachten die stetige Abbildung $\pi\colon E \to E/F$. Dies erinnert daran, wie wir uns schon kurz nach der Definition normierter Räume für stetige lineare Abbildungen fasziniert haben. Immerhin hatten sie die eindrucksvolle Eigenschaft, bereits stetig zu sein, wenn sie nur in Null stetig waren. Tatsächlich bleibt diese Aussage in topologischen Vektorräumen erhalten.

Satz 1.17. *Es seien E und F topologische Vektorräume und $T\colon E \to F$ linear. Dann ist T genau dann stetig, wenn T stetig in Null ist.*

Beweis. Ist irgendein $x \in E$ gegeben und $V \ni Tx$ eine Umgebung des Bildpunktes in F, so ist $V - Tx$ eine Nullumgebung in F und wir finden eine Nullumgebung U in E mit $T(U) \subset V - Tx$. Dann ist jedoch $x + U$ eine Umgebung von x mit $T(x+U) = Tx + T(U) \subset V$. □

Auch können wir Beschränktheit in topologischen Vektorräumen E definieren: Eine Teilmenge $A \subset E$ heißt *beschränkt*, falls für jede Nullumgebung U ein $\lambda > 0$ mit $A \subset \lambda U$ existiert. Eine lineare Abbildung, welche beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen abbildet, heißt dann auch *beschränkt*.

Nun ist jedoch Vorsicht geboten: Ist X beispielsweise ein unendlichdimensionaler Banach-Raum, so ist die Identität $(X, \sigma(X, X^*)) \to (X, \|\cdot\|)$ zwar beschränkt, aber offenbar nicht stetig. Die Beschränktheit der Abbildung lässt sich dabei aus dem Satz von Banach-Steinhaus folgern: Ist $A \subset X$ schwach beschränkt, so bedeutet dies gerade, dass x^*A für alle $x^* \in X^*$ beschränkt ist.

Doch zumindest die andere Implikation bleibt richtig.

Übungsaufgabe 1.7. Zeige, dass stetige lineare Abbildungen zwischen topologischen Vektorräumen beschränkt sind.

Zum Abschluss unseres ersten Kapitels beschäftigen wir uns mit endlichdimensionalen Räumen. Betrachten wir Hilbert-Räume, so stellen wir fest, dass sie *alle* isomorph (sogar isometrisch isomorph) sind. Begnügen wir uns mit Normen, so stellen wir fest, dass sich im Unendlichdimensionalen verschiedene Banach-Räume finden lassen, im Endlichdimensionalen aber alle Normen äquivalent sind. Jetzt haben wir eine noch allgemeinere Struktur auf Vektorräumen und fragen uns, ob nun endlich die endlichdimensionalen Vektorräume interessant werden. Die Antwort lautet: Nein, sie sind immer noch langweilig.

Satz 1.18. *Für $n \in \mathbb{N}$ ist jeder n-dimensionale hausdorffsche topologische Vektorraum isomorph zu $\mathbb{K}^n$ (mit der Standardtopologie).*

Dabei ist „isomorph“ in der Kategorie der topologischen Vektorräume zu verstehen: Ein Isomorphismus ist darin ein linearer Homöomorphismus. Den Beweis dieses Satzes wollen wir induktiv führen und verfrachten den Induktionsanfang in ein eigenes Lemma.

Lemma 1.19. *Ist E ein eindimensionaler hausdorffscher topologischer Vektorraum und $x_0 \in E$ von Null verschieden, so ist*

$$\mathbb{K} \to E\,,\ \lambda \mapsto \lambda x_0$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Offenbar ist diese Abbildung auch ohne die Hausdorff-Eigenschaft stetig und ein algebraischer Isomorphismus. Nur die Stetigkeit der Umkehrfunktion $\lambda x_0 \mapsto \lambda$ bleibt zu zeigen. Wir haben bereits gesehen, dass wir nur die Stetigkeit in Null zu untersuchen brauchen. Dazu sei $0 < \varepsilon < 1$ gegeben und wir wählen $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ mit $0 < |\lambda_0| < \varepsilon$. Nun nutzen wir die Hausdorff-Eigenschaft von E, um eine balancierte Nullumgebung V zu finden, welche $\lambda_0 x_0$ nicht enthält. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ so gewählt, dass $\lambda x_0 \in V$, so muss $|\lambda| < \varepsilon$ gelten, da V balanciert ist. Das Bild von V ist also in $(-\varepsilon, \varepsilon)$ enthalten. □

Wir zeigen nun den obigen Satz für alle $n \in \mathbb{N}$, nicht nur für $n = 1$.

Beweis von Satz 1.18. Der Induktionsanfang ist bereits getan. Ist hingegen $\{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Basis unseres topologischen Vektorraums E, so sei $F := \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$ nach Induktionsvoraussetzung isomorph zu $\mathbb{K}^{n-1}$. Dessen Vollständigkeit überträgt sich damit auf F. Da E hausdorffsch ist, ist F auch abgeschlossen und E/F ist wieder hausdorffsch. Außerdem hat E/F die Dimension Eins, ist nach obigem Lemma also isomorph zu $\mathbb{K}$. Gleiches gilt für $\operatorname{span}\{x_n\}$ und wir erhalten

$$E = F \oplus \operatorname{span}\{x_n\} \cong \mathbb{K}^{n-1} \oplus \mathbb{K} = \mathbb{K}^n\,.$$

□

Die Isomorphie von E/F zu $\operatorname{span}\{x_n\}$ brauchten wir, damit

$$E = F \oplus \operatorname{span}\{x_n\}$$

nicht nur eine algebraische direkte Summe, sondern auch eine topologische ist.

Falls dieser Begriff nicht klar ist, folgt eine kurze Erläuterung: Sind F_1 und F_2 topologische Vektorräume, so ist $E := F_1 \oplus F_2$ der topologische Vektorraum mit der Produkttopologie. Man zeigt leicht, dass eine algebraische direkte Summe $E = F_1 \dotplus F_2$ genau dann auch eine topologische ist, wenn die Projektionen auf F_1 und F_2 stetig sind. Ist eine stetig, so auch die andere (man bilde die Differenz mit der Identität).

Korollar 1.20. *Stetige lineare Funktionale (außer dem Nullfunktional) auf topologischen Vektorräumen sind offen.*

Beweis. Wir bezeichnen den Raum mit E und das Funktional mit f. Dann ist die Projektion $E \to E/\ker f$ offen. Diese können wir jedoch mit f identifizieren. □

2 Lokalkonvexe Räume

Wir gelangen nun zur wohl wichtigsten Klasse topologischer Vektorräume: Zu den lokalkonvexen topologischen Vektorräumen.

Definition 2.1. Ein topologischer Vektorraum heißt *lokalkonvex*, falls er eine Nullumgebungsbasis aus konvexen Mengen besitzt, falls also jede Nullumgebung eine konvexe Nullumgebung enthält.

Leider ist der Begriff „lokalkonvexer topologischer Vektorraum“ sehr lang, weshalb wir ihn wie bereits in der Überschrift mit „lokalkonvexer Raum“ abkürzen – ähnlich wie wir „normierter Raum“ statt „normierter Vektorraum“ sagen.

Nach dieser Begriffsklärung wollen wir natürlich Beispiele sehen. Aber die kennen wir schon!

Satz 2.2. *Sind die Mengen des Systems $\mathfrak{U}$ aus Satz 1.5 sogar konvex, so wird nicht nur ein topologischer Vektorraum, sondern sogar ein lokalkonvexer Raum erzeugt.*

Beweis. Klar – Schnitte konvexer Mengen sind konvex. □

Damit erkennen wir leicht, dass die normierte Räume mit der schwachen Topologie (Beispiel 1.6) und die Räume $C(\Omega)$ stetiger Funktionen auf Ω (für offenes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$) und $\mathscr{D}(K)$ glatter Funktionen mit Träger in K (für kompaktes $K \subset \mathbb{R}^n$) aus Beispielen 1.7 und 1.8 auch Beispiele für lokalkonvexe Räume sind. Und natürlich ist auch jeder normierte Raum konvex. In Beispiel 1.3 sind uns jedoch bereits die L^p-Räume für $0 < p < 1$ begegnet, welche nicht lokalkonvex sind. Dass diese tatsächlich nicht lokalkonvex sind, werden wir später mithilfe des Satzes von Hahn-Banach leicht einsehen können.

Doch zurück zur obigen Adaption von Satz 1.5. Wir stellen nämlich fest, dass wir auf eine Voraussetzung verzichten können:

Satz 2.3. *Ein System absorbierender, balancierter und konvexer Mengen auf einem Vektorraum E induziert eine eindeutige lokalkonvexe Topologie auf E.*

Beweis und Erklärung. Ein System $\mathfrak{U}$ wie wir es bisher benutzt haben, erhalten wir aus allen Mengen λV, $\lambda > 0$, wobei V eine der gegebenen Mengen ist. Da V nämlich konvex ist, gilt per Definition der Konvexität $\frac{1}{2}V + \frac{1}{2}V \subset V$. Die Menge $U := \frac{1}{2}V$ erfüllt also $U + U \subset V$ und ist von der Form λV, womit wir Satz 2.2 anwenden können. □

Beispiel 2.4. In einem normierten Raum genügt die Einheitskugel als absorbierende, balancierte und konvexe Menge.

Beispiel 2.5. Was $C(\Omega)$ betrifft, so ist für $\varepsilon, \lambda > 0$ und kompaktes $K \subset \Omega$

$$\lambda \left\{ f \in C(\Omega) : \sup_{x \in K} |f(x)| < \varepsilon \right\} = \left\{ f \in C(\Omega) : \sup_{x \in K} |f(x)| < \lambda\varepsilon \right\},$$

weshalb wir uns mit Mengen der Form

$$\left\{ f \in C(\Omega) : \sup_{x \in K} |f(x)| < 1 \right\}$$

begnügen können.

Beispiel 2.6. Analog benötigen wir zur Erzeugung der Topologie auf $\mathscr{D}(K)$ nur Mengen der Form

$$\left\{ f \in \mathscr{D}(K) : \sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)| < 1 \right\},$$

$\alpha \in \mathbb{N}^n$.

All diese Beispiele haben etwas gemeinsam: Die Abbildungen

$$x \mapsto |x^* x|$$

für Elemente x^* des Dualraums eines normierten Raumes,

$$f \mapsto \sup_{x \in K} |f(x)|$$

für kompaktes K bzw.

$$f \mapsto \sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)|$$

für $\alpha \in \mathbb{N}^n$ (und gegebenes K) sind Halbnormen.

Erinnerung: Eine Halbnorm ist definiert wie eine Norm; nur die positive Definitheit fordern wir nicht.

Definition 2.7. Ist E ein Vektorraum, so heißt $q\colon E \to [0, \infty)$ eine Halbnorm, falls für alle $x, y \in E$ die Dreiecksungleichung $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$ gilt und für $x \in E$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ außerdem $q(\lambda x) = |\lambda| q(x)$ gilt (womit $q(0) = 0$ erhalten bleibt).

Auf einem normierten Raum X können wir für $x^* \in X^*$ z. B. q_{x^*} als die Halbnorm

$$x \mapsto |x^* x|$$

definieren. Die schwache Topologie erzeugen wir nun mithilfe dieser Halbnormen, indem wir die balancierten, absorbierenden und konvexen Mengen

$$\{x \in X : q_{x^*}(x) < 1\}$$

verwenden. Betrachten wir nun $C(\Omega)$ für ein natürlich offenes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, so definieren wir für kompaktes $K \subset \Omega$ die Halbnorm

$$q_K\colon f \mapsto \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Wie wir damit die lokalkonvexe Topologie auf $C(\Omega)$ erzeugen, brauchen wir gar nicht mehr zu erwähnen. Für $\mathscr{D}(K)$ merken wir sogar nur noch an, dass wir hier die Familie der Halbnormen durch $\mathbb{N}^n$ indizieren.

Wir haben also endlich die Idee, wie wir eine lokalkonvexe Topologie durch eine Familie von Halbnormen erzeugen.

Satz 2.8. *Ist eine Familie $(q_i)_{i \in I}$ von Halbnormen auf einem Vektorraum E gegeben, so induziert diese eine lokalkonvexe Topologie auf E, indem wir Satz 2.3 auf die durch I indizierte Familie von Mengen*

$$\{x \in E : q_i(x) < 1\},$$

$i \in I$, anwenden.

Korollar 2.9. *Eine Nullumgebungsbasis in einer so erzeugten Topologie ist durch Mengen der Form*

$$\{x \in E : q_{i_1}(x) < \varepsilon, \dots, q_{i_n}(x) < \varepsilon\}$$

gegeben, wobei $\varepsilon > 0$ *und* $i_1, \dots, i_n \in I$*.*

Mit der vor Satz 1.5 erwähnten Umkehrung selbigen Satzes und Minkowski-Funktionalen ließe sich zeigen, dass sogar jede lokalkonvexe Topologie durch Halbnormen erzeugt werden kann. Wir wollen dies hier nur skizzieren, da wir bereits die eben genannte Aussage nicht bewiesen haben.

Ein *Minkowski-Funktional* ist jedenfalls einer Menge $A \subset E$ eine Vektorraums E zugeordnet. Wir nennen es dann μ_A und definieren es durch

$$\mu_A \colon E \to [0, \infty]\,,\ x \mapsto \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}\,.$$

Dabei verwenden wir die gängige Konvention, das Infimum der leeren Menge unendlich sein zu lassen: $\inf \emptyset = \infty$. Wir machen nun einige Beobachtungen für dieses Minkowski-Funktional zu $A \subset E$:

- Für $\lambda > 0$ ist $\mu_A(\lambda x) = \lambda \mu_A(x)$.
- Ist $0 \in A$, so ist $\mu_A(0) = 0$.
- Ist A absorbierend, so ist μ_A stets endlich, d. h. bildet nach $[0, \infty)$ ab.
- Ist A balanciert, so ist $\mu_A(\lambda x) = |\lambda| \mu_A(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$.

Ein wenig Rechnerei zeigt auch, dass μ_A subadditiv ist, falls A absorbierend und konvex ist. Das Minkowski-Funktional einer absorbierenden, balancierten und konvexen Menge ist also eine Halbnorm. Haben wir nun einen lokalkonvexen Raum E und ein System von Mengen V, welches die lokalkonvexe Topologie im Sinne von Satz 2.3 erzeugt, so ist diese Topologie auch durch die Familie von Halbnormen μ_V erzeugt. Die Details dieser Behauptung sind in ihrer Ausführung zwar nicht erschreckend lang, aber doch lang genug, um uns zu viel Zeit zu rauben (immerhin interessieren wir uns mehr dafür, *dass* wir lokalkonvexe Topologien durch Halbnormen angeben können). Nachzulesen sind sie beispielsweise in [Horv66] oder in jedem anderen Buch über topologische Vektorräume bzw. lokalkonvexe Räume.

Übungsaufgabe 2.1. Es sei E ein lokalkonvexer Raum und $(q_i)_{i \in I}$ eine die Topologie erzeugende Familie von Halbnormen. Zeige, dass E genau dann hausdorffsch ist, falls es für jedes $x \in E$ ein $i \in I$ mit $q_i(x) \neq 0$ gibt.

Tatsächlich ist dies bereits alles, was wir an dieser Stelle allgemein über lokalkonvexe Räume aussagen möchten. Stattdessen führen wir einige Beispiele an.

Beispiel 2.10. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $k \in \mathbb{N}$. Wir führen auf $C^k(\Omega)$ eine Topologie ein, indem wir für kompaktes $K \subset \Omega$ und $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \leq k$ die Halbnorm

$$q_{K,\alpha}(f) := \sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)|\,,$$

$f \in C^k(\Omega)$, definieren. Für $k = 0$ erhalten wir die Topologie von $C(\Omega)$ wieder. Analog wird $C^\infty(\Omega)$ zum lokalkonvexen Raum, indem wir $\alpha \in \mathbb{N}^n$ beliebig wählen und nicht mehr durch $|\alpha| \leq k$ einschränken.

Beispiel 2.11 (Schwartz-Raum). Es sei $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ der Raum aller glatten Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$, so dass f und alle Ableitungen von f „schnell fallen". Dies bedeutet: Für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^n$ und jedes $m \in \mathbb{N}$ gelte

$$\lim_{|x|\to\infty} \Big|(1+|x|^2)^m D^\alpha(x)\Big| = 0\,.$$

Auf diesem Raum können wir für $m \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{N}^n$ die Halbnorm

$$q_{m,\alpha}(f) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \Big|(1+|x|^2)^m D^\alpha(x)\Big|$$

einführen. Der so entstehende lokalkonvexe Raum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ heißt *Schwartz-Raum*.

Beispiel 2.12. Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum, so werden wir nun neun verschiedene Topologien auf dem Operatorraum $L(\mathcal{H})$ angeben. Einige lassen sich auch für $L(X, Y)$ definieren, wenn X und Y Banach-Räume sind. Dies ist in den meisten Fällen offensichtlich, weshalb wir uns von Anfang an auf Hilbert-Räume beschränken.

1. Die Normtopologie ist die durch die Operatornorm erzeugte Topologie, mit welcher $L(\mathcal{H})$ zum Banach-Raum wird.

2. Die schwache (Banach-Raum-)Topologie ist diejenige, welche $L(\mathcal{H})$ wie jeder andere Banach-Raum als schwache Topologie besitzt.

3. Die *starke Operatortopologie (SOT)* ist diejenige lokalkonvexe Topologie, welche durch die Halbnormen
$$q_x(T) := \|Tx\|\,,$$
$T \in L(\mathcal{H})$, für $x \in \mathcal{H}$ gegeben ist. Gelegentlich wird diese auch als starke Topologie bezeichnet.

4. Die *schwache Operatortopologie (WOT)* ist durch die Halbnormen
$$q_{x,y}(T) := |\langle Tx, y\rangle|\,,$$
$T \in L(\mathcal{H})$, für $x, y \in \mathcal{H}$ gegeben. Sie wird oft auch als schwache Topologie bezeichnet.

5. Ist nun $(x_n) \subset \mathcal{H}$ eine Folge mit $\sum\|x_n\|^2 < \infty$, so setzen wir
$$q_{(x_n)}(T) := \Big(\sum\|Tx_n\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\,,$$
$T \in L(\mathcal{H})$. Die so definierte Familie von Halbnormen erzeugt die *ultrastarke Topologie*.

6. Sind $(x_n), (y_n) \subset \mathcal{H}$ zwei Folgen mit $\sum\|x_n\|^2 < \infty$ und $\sum\|y_n\|^2 < \infty$, so ist
$$q_{(x_n),(y_n)}(T) := \sum|\langle Tx_n, y_n\rangle|\,,$$
$T \in L(\mathcal{H})$, eine Halbnorm und die so definierte Familie von Halbnormen erzeugt die *ultraschwache Topologie*.

7. Für $x \in \mathcal{H}$ definieren wir die Halbnorm
$$q_x(T) := \|Tx\| + \|T^*x\|\,,$$
$T \in L(\mathcal{H})$, und erzeugen dami die *starke* Topologie*. Man beachte, dass ein Analogon der schwachen (Operator-)Topologie unnötig ist.

8. Man kann nun leicht die Definition der *ultrastarken* Topologie* erraten. Für $(x_n) \subset \mathcal{H}$ mit $\sum \|x_n\|^2$ definieren wir unsere Halbnorm durch

$$q_{(x_n)}(T) := \left(\sum (\|Tx_n\|^2 + \|T^* x_n\|^2) \right)^{\frac{1}{2}} .$$

9. Zu guter letzt wollen wir noch die *Mackey-Topologie* erwähnen. Dies ist gerade die feinste lokalkonvexe Topologie auf $L(\mathcal{H})$, so dass ein lineares Funktional $L(\mathcal{H}) \to \mathbb{K}$ genau dann stetig ist, wenn es bezüglich der ultraschwachen Topologie stetig ist.

Wir verdeutlichen den Zusammenhang dieser Topologien in einem Diagramm – ein Pfeil von einer Topologie zu einer anderen bedeutet, dass die Topologie am Pfeilanfang feiner ist.

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Norm-} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
\substack{\text{schwache} \\ \text{(als Banach-Raum)}} \arrow[ddd] & & \text{Mackey} \arrow[d] & \\
 & & \text{ultrastarke}^* \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & \text{ultrastarke} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \text{starke}^* \arrow[dl] \\
\text{ultraschwache} \arrow[dr] & & \text{SOT} \arrow[dl] & \\
 & \text{WOT} & &
\end{tikzcd}$$

Bemerkung 2.13. Man kann den Operatorraum $L(\mathcal{H})$ als Dualraum eines Raums von sogenannten Spurklasse- bzw. nuklearen Operatoren auffassen (und dieser Prädualraum ist eindeutig). Die ultraschwache Topologie ist dann gerade die schwache* Topologie auf dem Dualraum $L(\mathcal{H})$. Allgemeiner ist für zwei Banach-Räume X und Y übrigens der Operatorraum $L(X, Y^*)$ der Dualraum des projektiven Tensorprodukts $X \hat{\otimes}_\pi Y$ (siehe Skript zur Banachraum-Theorie).

Beispiel 2.14. Ist $\Omega \in \mathbb{C}^n$ offen, so können wir natürlich $C(\Omega)$ analog zum Fall reeller Variablen definieren. Nun sei aber außerdem $H(\Omega)$ der Unterraum aller holomorphen Funktionen $\Omega \to \mathbb{C}$. Die lokalkonvexe Topologie auf $H(\Omega)$ ist wie bei Unterräumen zu erwarten durch die Unterraumtopologie gegeben (wobei letzterer „Unterraum" im topologischen Sinne gemeint ist). Insbesondere verwenden wir auf $H(\Omega)$ die gleichen Halbnormen wie auf $C(\Omega)$. Die kompakte Konvergenz, welche diese lokalkonvexe Topologie beschreibt, ist ggf. auch schon aus der Funktionentheorie bekannt.

Bevor wir zum wichtigen Beispiel des Raums von Testfunktionen kommen, beschäftigen wir uns mit der Metrisierbarkeit von lokalkonvexen Räumen. Nachdem wir nämlich wissen, dass Folgen im allgemeinen nicht genügen, um eine Topologie zu beschreiben, wünschen wir uns Topologien, in welchen sie doch ausreichen. Dies wiederum sind metrisierbare Topologien – in metrisierbaren topologischen Räumen können wir die Folgencharakterisierungen topologischer Begriffe verwenden, die wir aus metrischen Räumen kennen. Und noch besser gefällt es uns, wenn alle Cauchy-Folgen konvergieren.

Definition 2.15. Ein lokalkonvexer Raum, dessen Topologie durch eine vollständige translationsinvariante Metrik induziert werden kann, heißt *Fréchet-Raum*.

Obwohl Vollständigkeit eigentlich eine Eigenschaft der Metrik ist, ist sie für topologische Vektorräume nur von der Topologie abhängig.

Bemerkung 2.16. Sind zwei translationsinvariante Metriken auf einem topologischen Vektorraum gegeben (welche die gegebene Topologie induzieren), so ist die eine genau dann vollständig, wenn die andere vollständig ist.

Grund dafür ist, dass wir bereits in topologischen Vektorräumen einen Cauchy-Folgen-Begriff haben. Dieser stimmt mit dem Cauchy-Folgen-Begriff jeder Metrisierung überein.

Die Frage, wann ein hausdorffscher lokalkonvexer Raum metrisierbar ist, lässt sich erstaunlich einfach beantworten: Wenn seine Topologie durch *abzählbar viele* Halbnormen erzeugt wird. Tatsächlich ist dies sogar eine Äquivalenz, wir benötigen aber wieder nur eine Richtung.

Satz 2.17. *Ist E ein lokalkonvexer Vektorraum mit der Hausdorff-Eigenschaft und $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine* abzählbare *Familie von Halbnormen, welche die Topologie erzeugen, so ist*

$$d(x,y) := \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \frac{q_n(x-y)}{1+q_n(x-y)}\,, \tag{2.1}$$

$x, y \in E$, eine translationsinvariante Metrik auf E, welche ebenfalls die lokalkonvexe Topologie erzeugt.

Beweis. Haben wir Halbnormen q_n, so ist durch $q_n(x-y)$ offenbar eine Halbmetrik definiert. Um Definitheit zu erhalten, wollen wir alle $q_n(x-y)$ aufsummieren und hoffen, dass für $x \neq y$ niemals alle Summanden Null werden. Dies ist durch die Hausdorff-Eigenschaft sichergestellt – siehe auch Übungsaufgabe 2.1. Diese Summe sollte aber auch tatsächlich konvergieren. Da die Halbnormen beliebig groß werden können, ist dies zunächst nicht garantiert. Wir können die Halbmetrik $q_n(x-y)$ aber durch die bekanntlich äquivalente und durch Eins beschränkte Halbmetrik $\frac{q_n(x-y)}{1+q_n(x-y)}$ ersetzen. Nun haben wir Summanden in $[0,1]$. Um Konvergenz zu erhalten, bilden wir die Konvexe Reihe mit Vorfaktoren 2^{-n}. Die Halbmetrik-Eigenschaften bleiben erhalten und da E hausdorffsch ist, kommt die Definitheit hinzu. Unser d ist also tatsächlich eine Metrik.

Zu zeigen bleibt, dass tatsächlich dieselbe Topologie induziert wird. Möchten wir also $q_n(x)$ klein haben (x in einer durch q_n definierten Nullumgebung finden), so können wir dies durch eine Schranke für $d(x,0)$ erhalten, denn es ist $d(x,0) \geq 2^{-n}\frac{q_n(x)}{1+q_n(x)}$. Damit enthält jede Nullumgebung der lokalkonvexen Topologie von E eine Umgebung bezüglich der Metrik. Wollen wir umgekehrt $d(x,0)$ klein kriegen, so fordern wir von den ersten Summanden aus (2.1) klein zu sein – wählen eine Nullumgebung, die durch $q_1, \dots, q_{n_0}$ definiert wird. Dabei sei n_0 groß genug, dass die restlichen Terme, welche sich höchstens noch zu 2^{-n_0} aufsummieren, klein genug ist. So haben wir eine Nullumgebung bezüglich der Halbnormen gefunden, welche in einer gegeben Nullumgebung der Metrik enthalten ist.

Da die angegebene Metrik offenbar translationsinvariant ist, genügt dies bereits. □

Wir wollen nun herausfinden, ob die bisher eingeführten lokalkonvexen Räume sogar Fréchet-Räume sind. Dazu werden wir das folgende Lemma benötigen.

Lemma 2.18. *Ist M ein zweitabzählbarer lokalkompakter Raum, so existiert eine Folge (K_m) kompakter Mengen $K_m \subset M$ mit*

$$M = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_m$$

und $K_m \subset \mathring{K}_{m+1}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Wir sagen, dass (K_m) die Menge M ausschöpft.

Beweis. Die Voraussetzungen liefern eine abzählbare Überdeckung von M durch kompakte Mengen K_i'. Wir können z. B. $K_1 := K_1'$ setzen und die restlichen K_m induktiv definieren. Dazu fügen wir zu K_m einige der K_i' hinzu, um eine Umgebung des Randes ∂K_m zu erhalten. Da dieser Rand kompakt ist, genügen dazu endlich viele, und die entstehende Menge ist offenbar kompakt und hat K_m in ihrem Innern. □

Bemerkung 2.19. Für offenes $M = \Omega \subset \mathbb{K}^n$ können wir auch direkt

$$K_m := \left\{ x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{m}, |x| \leq m \right\}$$

setzen. Obiger intrinsischer Beweis erlaubt jedoch z. B. eine Verallgemeinerung auf Mannigfaltigkeiten.

Beispiel 2.20. Betrachten wir $\Omega \subset \mathbb{K}^n$ mit einer ausschöpfen Folge (K_m) kompakter Mengen, so wird die lokalkonvexe Topologie auf $C(\Omega)$ bereits durch die Halbnormen q_{K_m} erzeugt. Jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ ist nämlich in einem K_m enthalten.

Insbesondere ist $C(\Omega)$ metrisierbar.

Analog zeigt man die Metrisierbarkeit von $C^k(\Omega)$, $k = 1, \dots, \infty$, und $H(\Omega)$. Auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathscr{D}(K)$ haben wir ohnehin bereits nur abzählbar viele Halbnormen definiert.

Beispiel 2.21. Auch der Raum $L^p(0,1)$ für $0 < p < 1$ ist metrisierbar, aber (wie noch zu zeigen ist) nicht lokalkonvex.

Beispiel 2.22. Die schwache Topologie auf einem Banach-Raum, die schwache* Topologie auf einem Dualraum und die Operatortopologien (bis auf die Normtopologie) sind im Unendlichdimensionalen nicht metrisierbar.

Haben wir nun einen metrisierbaren lokalkonvexen Raum gegeben und wollen ihn auf Vollständigkeit überprüfen, so müssen wir nur Folgenvollständigkeit nachweisen.

Übungsaufgabe 2.2. Zeige, dass $C^k(\Omega)$, $k = 0, \dots, \infty$, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{D}(K)$ und $H(\Omega)$ Fréchet-Räume sind.[3] Nutze für $H(\Omega)$ den Satz von Weierstraß über kompakte Konvergenz von Folgen holomorpher Funktionen (falls er bekannt ist).

Wir stehen jetzt kurz davor, unseren Raum $\mathscr{D}(\Omega)$ von Testfunktionen zu definieren. Dazu führen wir nur noch eine neue Methode ein, lokalkonvexe Vektorräume zu konstruieren.

Definition 2.23. Es sei E ein Vektorraum und (E_n) eine Folge lokalkonvexer Räume, wobei E_n topologischer Untervektorraum von E_{n+1} sei ($E_n \subset E_{n+1}$) und

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \,.$$

Statten wir E mit der feinsten lokalkonvexen Topologie aus, unter der alle Einbettungen $E_n \hookrightarrow E$ stetig sind, so nennen wir diesen lokalkonvexen Raum den *induktiven Limes* der Folge (E_n). Ein induktiver Limes von Fréchet-Räumen heißt *LF-Raum*.

[3] Mit den üblichen Definitionen von Ω und K für solche Räume und natürlich für $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 2.24. Eine Nullumgebungsbasis in dieser Topologie auf E ist folgendermaßen gegeben: Eine konvexe Menge $V \subset E$ ist eine Nullumgebung in E, falls jeder Schnitt $V \cap E_n$ eine Nullumgebung in E_n ist.

Tatsächlich sind die Einbettungen $E_n \hookrightarrow E$ sogar Isomorphismen auf ihr Bild, weshalb wir E_n als Unterraum von E sehen können. Um dies zu zeigen, benötigen wir erst ein Lemma.

Lemma 2.25. *Es sei E ein lokalkonvexer Raum, $F \subset E$ ein Unterraum und V eine konvexe Nullumgebung in F. Dann gibt es eine konvexe Nullumgebung U in E, so dass $V = U \cap F$.*

Beweis. Nach der Definition der Unterraumtopologie finden wir zunächst eine konvexe Nullumgebung W in E mit $W \cap F \subset V$. Die gesuchte Menge U wird die konvexe Hülle von $V \cup W$ sein. Als Obermenge von W ist dies tatsächlich eine konvexe Nullumgebung in E und da F konvex ist, ist $U \cap F$ die konvexe Hülle von $(V \cup W) \cap F = V$. □

Satz 2.26. *Ist E induktiver Limes der Folge (E_n) lokalkonvexer Räume, so ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Einbettung $E_n \hookrightarrow E$ ein Isomorphismus auf ihr Bild.*

Beweis. Wir wollen also zeigen, dass die von E auf E_n induzierte Unterraumtopologie mit der auf E_n ursprünglich gegebenen übereinstimmt. Da $E_n \hookrightarrow E$ bereits stetig ist, bleibt zu zeigen, dass die auf E_n induzierte Topologie feiner als die bereits vorhandene ist. In letzterer sei dazu V_n eine Nullumgebung in E_n (wir wollen zeigen, dass diese auch in der Unterraumtopologie eine Nullumgebung ist). Durch Induktion und obiges Lemma finden wir konvexe Nullumgebungen V_{n+k} in E_{n+k}, $k \in \mathbb{N}$, mit $V_{n+k} \subset V_{n+k+1}$ und $V_{n+k} \cap E_n = V_n$ für alle k. Dann setzen wir

$$V := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} V_{n+k} \subset E\,.$$

Mit dieser Konstruktion ist V konvex und Schnitte von V mit den E_k sind Nullumgebungen im jeweiligen Raum E_n. Nach Definition der Topologie auf E ist V also eine Nullumgebung in E. Wir haben also eine konvexe Nullumgebung V in E, deren Schnitt mit E_n gerade V_n ist. Damit ist V_n auch bezüglich der Unterraumtopologie eine konvexe Nullumgebung in E. □

Außerdem machen wir eine Feststellung über die Stetigkeit von linearen Operatoren auf LF-Räumen.

Satz 2.27. *Ist E induktiver Limes der Folge (E_n) lokalkonvexer Räume, F ein weiterer lokalkonvexer Raum und $T\colon E \to F$ ein linearer Operator, so ist T genau dann stetig, wenn die Einschränkungen von T auf die Räume E_n stetig sind.*

Beweis. Ist T stetig, so ist klar, dass auch die Einschränkungen stetig sind. Umgekehrt sei jede Einschränkung $T|_{E_n}\colon E_n \to F$ stetig. Ist nun $V \subset F$ eine konvexe Nullumgebung, so wollen wir zeigen, dass auch $T^{-1}(V)$ eine konvexe Nullumgebung in E ist. Dazu ist $(T|_{E_n})^{-1}(V) = T^{-1}(V) \cap E_n$ eine konvexe Nullumgebung in E_n und mit der Definition der Topologie auf E folgt die gewünschte Aussage (denn $T^{-1}(V)$ ist natürlich konvex). □

Nun endlich definieren wir Räume von Testfunktionen.

Definition 2.28. Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, so sei (K_m) eine ausschöpfende Folge kompakter Mengen $K_m \subset \Omega$ (siehe Lemma 2.18). Wir definieren $\mathscr{D}(\Omega)$ als den induktiven Limes von $\mathscr{D}(K_m)$ und nennen ihn den *Raum der Testfunktionen auf* Ω.

Bemerkung 2.29. Eine Folge von Funktionen $f_n \in \mathscr{D}(\Omega)$ konvergiert genau dann gegen $f \in \mathscr{D}(\Omega)$ in $\mathscr{D}(\Omega)$, falls es ein Kompaktum $K \subset \Omega$ mit $\operatorname{supp} f_n \subset K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $f_n \to f$ in $\mathscr{D}(K)$. Insbesondere ist auch $\operatorname{supp} f \subset K$.

Nachdem wir also $\mathscr{D}(\Omega)$ eingeführt haben, können wir bereits Distributionen definieren. Unter einer Distribution wollen wir nämlich ein stetiges lineares Funktional auf dem Raum der Testfunktionen verstehen. Wie im Falle normierter Räume nennen wir den Raum solcher Funktionale den Dualraum, welchen wir im folgenden Kapitel näher betrachten wollen.

3 Dualräume und der Satz von Hahn-Banach

Das Kernstück dieses Kapitels wird der Satz von Hahn-Banach sein, dessen analytische Formulierung bereits aus der Funktionalanalysis 1 bekannt ist:

Satz 3.1 (Hahn-Banach, analytische Version)**.** *Es sei E ein Vektorraum, $F \subset E$ ein Unterraum, p ein sublineares Funktional auf E und $f\colon F \to \mathbb{K}$ ein lineares Funktional auf F mit $|f(x)| \leq p(x)$ für alle $x \in F$. Dann gibt es eine Fortsetzung $\tilde{f}\colon E \to \mathbb{K}$ von f auf ganz E (also $\tilde{f}|_F = f$), so dass $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$ für alle $x \in E$ gilt.*

Wir erinnern uns, dass daraus die Existenz stetiger linearer Funktionale auf Banach-Räumen mit gewissen Eigenschaften gefolgert wurde. Etwas ähnliches wollen wir nun für topologische Vektorräume erarbeiten. Dazu führen wir zunächst den Begriff des Dualraums ein.

Definition 3.2. Ist E ein topologischer Vektorraum, so nennen wir den Vektorraum E' aller stetigen linearen Funktionale $E \to \mathbb{K}$ den *Dualraum* von E.

Wir werden uns später auch mit Topologien auf dem Dualraum beschäftigen.

Beispiel 3.3. Ist $E = L^p(0,1)$ für $0 < p < 1$, so ist $E' = \{0\}$.

Die Kerne linearer Funktionale, lineare Hyperebenen, werden für uns auch von Interesse sein.

Definition 3.4. Es sei E ein Vektorraum. Eine Teilmenge der Form $x_0 + M$, wobei $x_0 \in E$ und M ein maximaler echter Unterraum von E ist, heißt *Hyperebene* in E.

Dies sind wie gesagt gerade Translationen von Kernen linearer Funktionale.

Lemma 3.5. *Eine Teilmenge $M \subset E$ ist genau dann ein maximaler echter Unterraum, falls M der Kern $\ker f$ eines nichttrivialen linearen Funkionals f ist.*

Beweis. Ist ein lineares Funktional f gegeben und $x_0 \notin \ker f$, so ist bekanntlich $E = \ker f \dotplus \operatorname{span}\{x_0\}$, womit $\ker f$ offenbar ein maximaler Unterraum ist.

Umgekehrt sei M ein maximaler Unterraum und $x_0 \notin M$, so dass $E = M \dotplus \operatorname{span}\{x_0\}$. Wir können also jedes $x \in E$ in der Form $x = m + \lambda x_0$, $m \in M$, $\lambda \in \mathbb{K}$, schreiben und lineares Funktional über $m + \lambda x_0 \mapsto \lambda$ definieren. $\square$

Wir erinnern uns nun daran, dass Abschlüsse von Unterräumen in topologischen Vektorräumen wieder Unterräume sind und wenden dies auf maximale Unterräume an.

Korollar 3.6. *Hyperebenen in topologischen Vektorräumen sind entweder abgeschlossen oder dicht.*

Die abgeschlossenen Hyperebenen assoziieren wir mit den stetigen linearen Funktionalen.

Lemma 3.7. *Es sei E ein topologischer Vektorraum. Der Kern $\ker f$ eines linearen Funktional ist genau dann abgeschlossen, wenn f stetig ist.*

Beweis. Ist $\ker f$ abgeschlossen, so ist $E/\ker f$ eindimensional und hausdorffsch. Ist $x_0 \in E$ mit $f(x_0) = 1$, so ist nach Lemma 1.19 die Abbildung

$$g\colon E/\ker f \to \mathbb{K}\,, \quad \lambda x_0 + \ker f \mapsto \lambda$$

ein Isomorphismus. Bezeichnen wir mit $\pi\colon E \to E/F$ die kanonische Projektion, so ist jedoch $f = g \circ \pi$. $\square$

Wir geben nun ein Kriterium für die Stetigkeit eines linearen Funktionals an und kommen damit gleichzeitig dem Satz von Hahn-Banach näher.

Lemma 3.8. *Es sei E ein topologischer Vektorraum, p eine stetige Halbnorm auf E. Ist nun f ein lineares Funktional auf E mit $f \leq p$ (punktweise), so ist f bereits stetig.*

Beweis. Ist $(x_i)_{i\in I} \subset E$ ein gegen Null konvergentes Netz, so folgt $p(x_i) \to 0$, also auch $f(x_i) \to 0$. □

Wir erinnern nur noch an die Minkowski-Funktionale, welche wir vor Beispiel 2.10 kennengelernt haben.

Lemma 3.9. *Es sei E ein topologischer Vektorraum, p ein stetiges sublineares Funktional auf E. Ist nun f ein lineares Funktional auf E mit $f \leq p$ (punktweise), so ist f bereits stetig.*

Beweis. Man wähle eine absorbierende, balancierte, konvexe Nullumgebung, welche Teilmenge von $\{x \in E : p(x) < 1\}$ ist (dies ist möglich, da letztere Menge eine konvexe Nullumgebung ist). Bezeichnen wir mit q das Minkowski-Funktional dieser Umgebung, so ist q eine Halbnorm mit $p \leq q$ und wir können das vorige Lemma anwenden. □

Endlich gelangen wir nun zum Satz von Hahn-Banach.

Satz 3.10 (Hahn-Banach, geometrische Version)**.** *Es sei E ein topologischer Vektorraum, $K \subset E$ eine offene, nichtleere und konvexe Menge und $M \subset E$ ein affiner Unterraum mit $K \cap M = \emptyset$. Dann existiert eine abgeschlossene Hyperebene $H \subset$, welche M enthält, aber keinen Punkt von K.*

Wir geben den Beweis zunächst nur für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Beweis. Durch Translation können wir o. B. d. A. annehmen, dass M ein Unterraum ist, d. h. $0 \in M$. Da K offen und konvex ist, ist für $x_0 \in K$ das Minkowski-Funktion $p := \mu_{K-x_0}$ von $K - x_0$ ein nichtnegatives sublineares Funktional. Weiter ist

$$K = x_0 + \{x \in E : p(x) < 1\} = \{x \in E : p(x - x_0) < 1\},$$

womit p insbesondere stetig ist. Außerdem ist $p(m-x_0) \geq 1$ für alle $m \in M$, da $K \cap M = \emptyset$. Da wir jedes $x \in E$ als $x = \lambda x_0 + m$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $m \in M$ darstellen können, ist mit

$$f(\lambda x_0 + m) = -\lambda$$

ein lineares Funktional f auf $M \dotplus \operatorname{span}\{x_0\}$ gegeben. Unser Ziel ist nun klar: Wir zeigen $f \leq p$ und wenden die analytische Version des Satzes von Hahn-Banach an.

Zeigen wir also $f \leq p$, wozu wir $\lambda \in \mathbb{R}$ und $m \in M$ wählen. Zunächst bemerken wir für $\lambda \geq 0$

$$f(\lambda x_0 + m) = -\lambda \leq 0 \leq p(\lambda x_0 + m).$$

Für $\lambda < 0$ bemerken wir $-\frac{m}{\lambda} \in M$, also $p\left(-\frac{m}{\lambda} - x_0\right) \geq 1$, womit wir

$$f(\lambda x_0 + m) = -\lambda \leq -\lambda p\left(-\frac{m}{\lambda} - x_0\right) = p(m + \lambda x_0)$$

erhalten. Es ist also tatsächlich $f \leq p$ und nach der analytischen Version 3.1 des Satzes von Hahn-Banach können wir f zu $\tilde{f}$ auf E fortsetzen und behalten die Eigenschaft $\tilde{f} \leq p$.

Nun ist $\tilde{f}$ nach Lemma 3.9 stetig und $H := \ker \tilde{f}$ ist tatsächlich eine abgschlossene Hyperebene, welche M enthält. Es bleibt $\ker \tilde{f} \cap K = \emptyset$ zu zeigen. Ist jedoch $x \in \ker \tilde{f}$, so erhalten wir

$$1 = -\tilde{f}(x_0) = \tilde{f}(x - x_0) \leq p(x - x_0)\,,$$

also $x \notin K$.

Ist allerdings $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so betrachten wir E und M zunächst als reelle Vektorräume und erhalten eine reelle Hyperebene H mit $H \supset M$ und $H \cap K = \emptyset$. Dann ist auch $\mathrm{i}H \supset \mathrm{i}M$ und wir behaupten, dass $H \cap \mathrm{i}H$ unsere gesuchte Hyperebene ist. Dazu ist bloß noch zu zeigen, dass dies tatsächlich eine Hyperebene ist. Gehen wir also von $H = \ker \tilde{f}$ aus ($\tilde{f}$ ist reell linear), so ist durch

$$g(x) := \tilde{f}(x) - \mathrm{i}\tilde{f}(\mathrm{i}x)$$

ein komplex lineares Funktional mit $H \cap \mathrm{i}H = \ker g$ gegeben. □

Nun folgen einige Korollare.

Korollar 3.11. *Es sei E ein topologischer Vektorraum, $K \subset E$ offen und konvex und $M \subset E$ ein Unterraum, so dass $K \cap M = \emptyset$. Dann gibt es ein $f \in E'$, so dass $f = 0$ auf M und $\operatorname{Re} f > 0$ auf K.*

Beweis. Wir wissen bereits, dass ein $f \in E'$ mit $M \subset \ker f$ und $\ker f \cap K = \emptyset$ existiert. Als konvexe Menge ist K jedoch auch zusammenhänged und $\operatorname{Re} f$ ist stetig und reellwertig. □

Korollar 3.12. *Es sei E ein lokalkonvexer Raum, $M \subset E$ ein abgeschlossener Unterraum und $x \notin M$. Dann gibt es ein Funktional $f \in E'$, welches auf M verschwindet, aber $f(x) \neq 0$.*

Beweis. Wir finden eine offene konvexe Umgebung von x, welche M nicht trifft. □

Korollar 3.13. *Ist E ein lokalkonvexer Raum und $x \notin \overline{\{0\}} \subset E$, so gibt es ein $f \in E'$ mit $f(x) \neq 0$.*

Korollar 3.14. *Es sei E ein hausdorffscher lokalkonvexer Raum. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) *Der Dualraum E' ist* punktetrennend, *d. h. für $x, y \in E$ mit $x \neq y$, gibt es ein $f \in E'$ mit $f(x) \neq f(y)$.*

(ii) *Ist $x \in E$ mit $f(x) = 0$ für alle $f \in E'$, so folgt $x = 0$.*

(iii) *Ist $M \subset E$ ein Unterraum und $x \in E$ so, dass $f(x) = 0$ für alle auf M verschwindenden Funktionale $f \in E'$, so folgt $x \in \overline{M}$.*

Insbesondere ist der Dualraum eines nichttrivialen lokalkonvexen Raumes niemals trivial.

Beispiel 3.15. Wir sehen nun endgültig ein, dass $L^p(0,1)$ für $0 < p < 1$ nicht lokalkonvex ist.

Die Forderung, dass sogar eine Nullumgebungsbasis aus konvexen Mengen besteht, ist für die Nichttrivialität des Dualraums aber sogar schon zu stark. Es genügt die Existenz irgendeiner (nichttrivialen) konvexen Nullumgebung.

Korollar 3.16. *Ein topologischer Vektorraum E hat genau dann einen nichttrivialen Dualraum, falls er eine von E verschiedene konvexe Nullumgebung besitzt.*

Beweis. Existiert eine solche Nullumgebung V, so gibt es also $x \notin V$ und das (nichttriviale) lineare Funktional

$$\operatorname{span}\{x\} \to \mathbb{K}\,,\ \ \lambda x \mapsto \lambda$$

wird durch das Minkowski-Funktional μ_V von V dominiert. Letzteres ist stetig, denn $V \subset \mu_V^{-1}[-1,1]$ ist eine Nullumgebung. wir können f also auf ganz E fortsetzen und erhalten ein nichttriviales Element des Dualraums.

Ist umgekehrt $f \in E'$ nichttrivial, so ist $f^{-1}(-1,1)$ eine nichttriviale konvexe Nullumgebung. □

Wichtige Folgerungen aus unserem Satz von Hahn-Banach sind die Trennungssätze. Diese gibt es in Dutzenden Formulierungen, haben jedoch stets das Grundgerüst, dass für zwei konvexe disjunkte Teilmengen eines topologischen Vektorraumes die Existenz eines Funktionals garantiert wird, welches die beiden Mengen „trennt“. Stellt man stärkere Voraussetzungen an die betrachteten Mengen, so erhält man eine stärkere Trennung. Wir geben zwei Formulierungen.

Satz 3.17. *Es sei E ein topologischer Vektorraum, $A, B \subset E$ seien zwei disjunkte konvexe Teilmengen und A sei außerdem offen. Dann gibt es ein $f \in E'$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass*

$$\operatorname{Re} f(x) < \alpha \leq \operatorname{Re} f(y)$$

für alle $x \in A$ und $y \in B$. Ist auch B offen, so können wir die Ungleichung zu

$$\operatorname{Re} f(x) < \alpha < \operatorname{Re} f(y)$$

verbessern.

Beweis. Die Menge

$$A - B = \bigcup_{y \in B} (A - y)$$

ist offen und enthält die Null nicht. Nach Korollar 3.11 finden wir ein $f \in E'$ mit $f(x-y) > 0$ für alle $x \in A$ und $y \in B$. Da $f(A)$ sogar offen ist, erhalten wir die erste Behauptung. Ist B offen, so auch $f(B)$ und wir erhalten in $\alpha < \operatorname{Re} f(y)$ echte Ungleichheit. □

Korollar 3.18. *Es sei E ein topologischer Vektorraum, $A, B \subset E$ seien zwei konvexe Teilmengen, wobei A ein nichtleeres Inneres $\mathring{A}$ hat, welches B nicht schneidet: $\mathring{A} \cap B = \emptyset$. Dann gibt es ein $f \in E'$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass*

$$\operatorname{Re} f(x) \leq \alpha \leq \operatorname{Re} f(y)$$

für alle $x \in A$ und $y \in B$.

Satz 3.19. *Es sei E ein lokalkonvexer Raum, $A, B \subset E$ seien zwei disjunkte konvexe Teilmengen, wobei A abgeschlossen und B kompakt sei. Dann gibt es ein $f \in E'$, so dass*

$$\sup f(A) < \inf f(B)\,.$$

Mit anderen Worten: Es gibt $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) \leq \alpha < \beta \leq f(y)$$

für alle $x \in A$ und $y \in B$.

Beweisskizze. Wir zeigen die Existenz einer konvexen Nullumgebung V, so dass $A+V$ und $B+V$ disjunkt sind, womit die Aussage nach Satz 3.17 folgt. Dazu wiederum finden wir eine konvexe, balancierte und offene Nullumgebung W mit $(A+W)\cap B=\emptyset$ und wählen $V=\frac{1}{2}W$. Wir betrachten also das System aller konvexer, balancierter und offener Nullumgebungen U (solche existieren, da E lokalkonvex ist) und nehmen an, dass jedes $A+U$ nichtleeren Schnitt mit B hat. Nun nutzen wir ein wenig Topologie: Die Mengen $(A+U)\cap B$ bilden nämlich eine Filterbasis in B und die Kompaktheit von B liefert uns einen Berührpunkt – einen Punkt $x_0 \in B$, so dass jede Menge $\overline{A+U}\subset A+2U$ den Punkt x_0 enthält. Dies ist mit

$$x_0 \in \bigcap_U \overline{A+U} \subset \bigcap_U (A+2U) = \overline{A} = A$$

ein Widerspruch, denn dann wäre $x_0 \in A\cap B=\emptyset$. □

Nun kennen wir also bereits einige Aussagen über die Existenz stetiger linearer Funktionale. Wir wenden uns der Untersuchung des Dualraumes zu. Von Interesse ist etwa die Topologisierung von E', wobei E ein lokalkonvexer Raum ist.

Definition 3.20. Es sei E ein lokalkonvexer Raum und $\mathfrak{S}$ (Fraktur-S) eine Familie von Teilmengen von E. Als die $\mathfrak{S}$-*Topologie auf* E' bezeichnen wir diejenige lokalkonvexe Topologie auf E', welche durch die Halbnormen

$$q_S(x') := \sup_{x\in S} |x'x| \,,$$

$x'\in E'$, $S\in\mathfrak{S}$, definiert ist.

Dies ist gerade die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Mengen von $\mathfrak{S}$. Wählen wir $\mathfrak{S}$ als das System aller endlichen Teilmengen von E, so erhalten wir auf E' die Topologie der punktweisen Konvergenz, welche auch als *schwache* Topologie* bekannt ist. Wählen wir $\mathfrak{S}$ als das System aller beschränkten Teilmengen von E, so nennen wir die resultierende $\mathfrak{S}$-Topologie auf E' die *starke Topologie* auf E'. Ist E sogar ein normierter Raum, so stimmen die hier definierte schwache und starke Topologie auf E' mit den bekannten Definitionen überein. Für die schwache Topologie ist dies offensichtlich; Für die starke Topologie ist die zur Einheitskugel gehörige Halbnorm gerade die Norm des Dualraums.

Bemerkung 3.21. Anstelle durch Halbnormen können wir die $\mathfrak{S}$-Topologie auch durch Angabe der Nullumgebungen

$$G^\circ := \{x'\in E' : q_S(x')\le 1\} = \left\{x'\in E' : \sup_{x\in S}|x'x| \le 1\right\} ,$$

$S\in\mathfrak{S}$, definieren. Für $G\subset E$ heißt die so definierte Menge $G^\circ\subset E'$ die *Polare* von G. Der *Satz von Alaoglu* lautet nun in seiner allgemeinsten Form: Die Polare einer Nullumgebung in einem lokalkonvexen Raum ist schwach* kompakt. Da offenbar die Polare der Einheitskugel eines normierten Raumes gerade die Einheitskugel des Dualraums ist, verallgemeinert dies tatsächlich den bekannten Satz von Alaoglu über normierte Räume.

Einige Autoren definieren die Polare von S als

$$\left\{x'\in E' : \sup_{x\in S} \operatorname{Re} x'x \le 1\right\} .$$

Der Satz von Alaoglu gilt auch für diese Defintion der Polaren.

Übungsaufgabe 3.1. Überlege dir eine sinnvolle Definition der schwachen Topologie auf lokalkonvexen Räumen.

Die $\mathfrak{S}$-Topologie ist zwar lokalkonvex; wir wissen jedoch nicht, ob sie auch die (wünschenswerte) Hausdorff-Eigenschaft besitzt.

Lemma 3.22. *Gilt $\bigcup \mathfrak{S} = E$, so ist die $\mathfrak{S}$-Topologie auf E' hausforffsch.*

Beweis. Für $0 \neq x' \in E'$ suchen wir eine Menge $S \in \mathfrak{S}$ mit $x' \notin S^\circ$. Diese wählen wir so, dass sie ein $x \in E$ mit $x'x > 1$ enthält. □

Letztlich betrachten wir einige Beispiele für Dualräume. Dabei gehen wir davon aus, dass die Beschreibungen der Dualräume der hier vorgestellten Banach-Räume bekannt sind.

Beispiel 3.23. Und auch für beliebiges $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kann $C(\Omega)^*$ auf die offensichtliche Weise mit dem Raum aller regulären Borel-Maße auf Ω mit kompaktem Träger identifiert werden. Für ein $F \in C(\Omega)^*$ gibt es nämlich eine stetige Halbnorm der Form q_K, $q_K(f) = \sup_{x \in K}|f(x)|$, mit kompaktem $K \subset \Omega$, so dass $|F(f)| \leq A q_K(f)$ für ein $A > 0$. Nun können wir F als Element von $C(K)^*$ auffassen.

Beispiel 3.24. Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, so können wir den Dualraum von $H(\Omega)$ mit dem Raum aller auf $\mathbb{C} \setminus \Omega$ holomorphen und im Unendlichen verschwindenden Funktionen identifizieren. Wir beschränken uns dazu auf den Fall, dass Ω die offene Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ ist. Zunächst zeigen wir, dass jede auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ holomorphe Funktion g per

$$f \mapsto \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B_r(0)} f(z) g(z) \,\mathrm{d}z$$

definiert, wobei $r < 1$ so gewählt sei, dass g auf dieser Kreislinie $K := \partial B_r(0)$ holomorph ist. Dies ist jedoch schnell getan, indem wir den Betrag des obigen Bildwertes durch $\frac{1}{2\pi} q_K(f) q_K(g) 2\pi r$ abschätzen.
Umgekehrt sei $F \in H(\mathbb{D})^*$ gegeben. Da $H(\mathbb{D})$ ein Unterraum von $C(\mathbb{D})$ ist, können wir F zu einem Funktional auf $C(\mathbb{D})$ fortsetzen und mit einem Maß μ identifizieren, welches einen kompakten Träger $K \subset \mathbb{D}$ hat. Nun setzen wir

$$g(z) := \int_K \frac{1}{z - w} \,\mathrm{d}\mu(w)$$

für $z \in \mathbb{C} \setminus K \supset \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$. Wir stellen fest, dass g mit

$$g'(z) = -\int_K \frac{1}{(z-w)^2} \,\mathrm{d}\mu(w)$$

holomorph ist und im Unendlichen verschwindet. Wir wählen nun $r < 1$ so, dass K im Innern der Kreisscheibe $B_r(0)$ enthalten ist. Dann erhalten wir für $f \in H(\mathbb{D})$ nämlich

$$\begin{aligned} F(f) &= \int_K f(w) \,\mathrm{d}\mu(w) = \int_K \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{z - w} \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\mu(w) \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B_r(0)} f(z) \int_K \frac{1}{z - w} \,\mathrm{d}\mu(w) \,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B_r(0)} f(z) g(z) \,\mathrm{d}z \,. \end{aligned}$$

Von besonderem Interesse ist natürlich auch der Dualraum $\mathscr{D}'(\Omega)$ von $\mathscr{D}(\Omega)$. Diesen werden wir im Folgenden als Raum der Distributionen untersuchen. Dazu werden wir jedoch zunächst eine genauere Untersuchung des Raumes $\mathscr{D}(\Omega)$ vornehmen.

4 Induktive Limites und $\mathscr{D}(\Omega)$

Zur Vorbereitung auf die Distributionentheorie wollen wir mehr über den Raum $\mathscr{D}(\Omega)$ der Testfunktionen in Erfahrung bringen. Dieser ist nicht leicht zu fassen, da wir ihn als induktiven Limes von Räumen der Form $\mathscr{D}(K)$ (für kompaktes $K \subset \Omega$). Deshalb schieben wir nun eine genauere Untersuchung induktiver Limites ein. Wir fassen unsere bisherigen Kenntnisse zusammen:

Ist (E_n) eine aufsteigende Folge lokalkonvexer Räume, so erhalten wir auf $E := \bigcup E_n$ eine lokalkonvexe Topologie, indem wir eine konvexe Menge $V \subset E$ Nullumgebung nennen, falls alle Mengen $V \cap E_n$ Nullumgebungen sind. Dies ist gerade die feinste lokalkonvexe Topologie, unter welcher alle Einbettungen $E_n \hookrightarrow E$ stetig sind und tatsächlich ist die Unterraumtopologie von $E_n \subset E$ die ursprüngliche Topologie auf E_n. Lineare Operatoren $T\colon E \to F$ in einen anderen lokalkonvexen Raum sind genau dann stetig, wenn all ihre Einschränkungen $T\colon E_n \to F$ stetig sind. Daraus erhalten wir direkt eine erste Folgerung

Korollar 4.1. *Es sei $E = \bigcup E_n$ ein LF-Raum und $T\colon E \to F$ sei ein linearer Operator in einen weiteren lokalkonvexen Raum. Ist T folgenstetig, so ist T bereits stetig.*

Beweis. Auch wenn E nicht metrisierbar sein muss, so lässt impliziert die Folgenstetigkeit für alle Einschränkungen $T\colon E_n \to F$ Stetigkeit. □

Betrachten wir jedoch unsere Definition von $\mathscr{D}(\Omega)$, so stellen wir fest, dass diese von einer ausschöpfenden Folge kompakter Mengen $K_n \subset \Omega$ abhängt. Wir zeigen, dass die Wahl dieser Folge irrelevant ist.

Satz 4.2. *Es seien $E = \bigcup E_n = \bigcup F_n$ zwei induktive Limites (welche nicht notwendigerweise dieselbe Topologie auf E erzeugen). Kann jeder Raum E_n stetig in einen Raum F_m, $n, m \in \mathbb{N}$, eingebettet werden, so ist die Topologie auf $E = \bigcup E_n$ feiner als die von $E = \bigcup F_n$.*

Beweis. Es sei $V \subset E$ eine konvexe Menge, so dass $V \cap F_m$ Nullumgebung in jedem F_m sei. Kann E_n stetig in F_m eingebettet werden, so ist $V \cap E_n = (V \cap F_m) \cap E_n$ jedoch auch Nullumgebung in E_n. □

Damit ist die Definition $\mathscr{D}(\Omega) := \bigcup \mathscr{D}(K_n)$ unabhängig von der Wahl der K_n. Unter Verwendung von gerichteten Mengen anstelle von $\mathbb{N}$ hätten wir $\mathscr{D}(\Omega)$ auch als induktiven Limes aller $\mathscr{D}(K)$ für kompaktes $K \subset \Omega$ definieren können.

Wir erinnern nochmals an die Konvergenz in $\mathscr{D}(\Omega)$: Soll $(\varphi_n) \subset \mathscr{D}(\Omega)$ gegen $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ konvergieren, so muss φ in einem Raum $\mathscr{D}(K')$ liegen, wobei $K' \subset \Omega$ natürlich kompakt sei. Die Träger fast aller φ_n liegen dann in einer Umgebung von K', welche wiederum in einer kompakten Menge $K \subset \Omega$ liegend gewählt werden kann. Nun reduziert sich die Betrachtung auf Konvergenz in K:

Lemma 4.3. *Eine Folge $(\varphi_n) \subset \mathscr{D}(\Omega)$ konvergiert genau dann gegen $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, falls es ein Kompaktum $K \subset \Omega$ gibt, so dass die Träger (fast) aller φ_n und φ in K liegen und alle Ableitungen der φ_n gleichmäßig auf K gegen diejenigen von φ konvergieren (für jeden Multiindex α konvergiere $D^\alpha \varphi_n$ gleichmäßig gegen $D^\alpha \varphi$).*

Korollar 4.4. *Ein lineares Funktional L auf $\mathscr{D}(\Omega)$ ist genau dann stetig, wenn $L(\varphi_n) \to 0$ für jede Folge $(\varphi_n) \subset \mathscr{D}(\Omega)$, für welche $\bigcup \operatorname{supp} \varphi_n$ relativ kompakt ist und für welche alle Ableitungen der φ_n auf dem Abschluss dieser Menge gleichmäßig gegen Null konvergieren.*

Literatur

[Horv66] J. Horvath, *Topological Vector Spaces and Distributions*, Addison-Wesley (1966)

[NaBe11] L. Narici, E. Beckenstein, *Topological Vector Spaces*, CRC Press (2011)

[Scha71] H. H. Schaefer, *Topological Vector Spaces*, Springer-Verlag (1971)

[Trev67] F. Treves, *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, Academic Press (1967)

Index