Lineare Algebra 3

Ché Netzer

29. November 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Mu	tilineare Algebra	1					
	1.1	Tensorprodukte	1					
	1.2	Symmetrische und alternierende Produkte						
	1.3	Anwendungen						
		1.3.1 Determinanten	9					
		1.3.2 Differentialformen	10					
2	Dar	stellungstheorie	12					
	2.1	Erinnerung: Gruppen	12					
	2.2	Darstellungen von Gruppen	12					
Li	terat	ur	13					

1 Multilineare Algebra

Lineare und multilineare Algebra sind eng verwandt. Doch auch innerhalb der linearen Algebra bekommt man es oft mit der multilinearen zu tun. Bilinearformen dürften bereits bekannt sein und auch die Determinante ist eine (alternierende) Multilinearform in den Spalten einer Matrix.

1.1 Tensorprodukte

Die elementaren Objekte der multilinearen Algebra sind die Tensorprodukte. Während das kartesische Produkt $V \times W$ zweier Vektorräume V und W "linear in beiden Eingängen V und W gleichzeitig" ist, wird das Tensorprodukt $V \otimes W$ (so die gleich einzuführende Notation) linear in beiden Eingängen einzeln sein.

Dies kann bereits eine Defition von Tensorprodukten motivieren. Es seien dazu V und W zwei Vektorräume über einem Körper \mathbb{K} . Als $V\otimes W$ wollen wir denjenigen Vektorraum verstehen, welcher von allen Symbolen der Form $v\otimes w$ mit $v\in V$ und $w\in W$ erzeugt wird, wobei diese Schreibweise bilinear in beiden Eingängen sein soll. Es ist also

$$V \otimes W = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i} v_{i} \otimes w_{i} : \alpha_{i} \in \mathbb{K}, v_{i} \in V, w_{i} \in W, n \in \mathbb{N} \right\},\,$$

wobei die Elemente zunächst formale Linearkombinationen sind, d. h. die auftretende Summe ist nur eine Schreibweise und greift nicht auf irgendeine zuvor definierte Verknüpfung zurück. Es gelten die Rechenregeln

$$\alpha(v \otimes w) = (\alpha v) \otimes w = v \otimes (\alpha w) =: \alpha v \otimes w$$

und

$$(v+v')\otimes w = v\otimes w + v'\otimes w$$
 sowie $v\otimes (w+w') = v\otimes w + v\otimes w'$.

Diese Definition ist zwar sehr intuitiv und mit ihr arbeitet man oft auch, aber sie mag noch etwas schwammig erscheinen. Formalisiert man sie, so führt man zunächst die offensichtlichen Vektorraumoperationen auf der Menge $V \otimes W$ von formalen Linearkombinationen ein. Möchte man die Rechenregeln umsetzen, so identifiziert man die Objekte auf beiden Seiten der jeweiligen Gleichungen. Dies wird durch Bildung eines Quotientenraumes erreicht¹.

Definition 1.1. Es seien V und W zwei \mathbb{K} -Vektorräume. Wir bezeichnen mit $V \otimes W$ den Vektorraum den freien Vektorraum über der kartesischen Produktmenge $V \times W$, also

$$V \tilde{\otimes} W = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(v_i, w_i) : \alpha_i \in \mathbb{K}, (v_i, w_i) \in V \times W \right\}.$$

Auf $V \times W$ verwenden wir hier noch keine Vektorraumstruktur, d. h. Linearkombinationen sind tatsächlich nur formal und können noch nicht vereinfacht werden, wenn die (v_i, w_i) verschieden sind. Mit $N \subset V \widetilde{\otimes} W$ bezeichnen wir den Unterraum, welcher von Elementen

¹Zur Erinnerung an die Anschauung: Der Raum, welcher herausdiviert wird, "wird zu Null". Möchten wir also zwei Elemente identifizieren, so dividieren wir deren Differenz heraus.

der Form

$$\alpha(v, w) - (\alpha v, w),$$

$$\alpha(v, w) - (v, \alpha w),$$

$$(v + v', w) - (v, w) - (v', w),$$

$$(v, w + w') - (v, w) - (v, w')$$

erzeugt wird. Nun setzen wir

$$V \otimes_{\mathbb{K}} W := V \otimes W := (V \tilde{\otimes} W)/N$$

und die Restklasse von (v, w) bezeichnen wir mit $v \otimes w$.

Bemerkung 1.2. Wie oben angedeutet ist ein freier Vektorraum über einer Menge M ein Vektorraum, der M als Basis besitzt und aus formalen Linearkombinationen der Elemente von M besteht.

Man überzeuge sich, dass für den nun formal definierten Ausdruck $v \otimes w$ die oben gewünschten Rechenregeln gelten.

Nicht jedes Element von $V \otimes W$ ist von der Form $v \otimes w$; auch Linearkombinationen hiervon sind enthalten.

Bevor wir uns mit allgemeinen Eigenschaften von Tensorprodukten beschäftigen, geben wir zunächst eine Interpretation.

Beispiel 1.3. Wir veranschaulichen die bilineare Struktur von $V \otimes W$. Dazu betrachten wir den Raum der Bilinearformen

$$\beta \colon V \times W \to \mathbb{K}$$

und behaupten, dass wir diesen mit dem Raum der Linearformen

$$\overline{\beta} \colon V \otimes W \to \mathbb{K}$$

identifizieren können. Während bei einem linearen Produkt die Bilinearität also in der Definition der Abbildung stecken musste, kommen wir bei einem bilinearen Produkt mit einer linearen Abbildung zum gleichen Ergebnis. Einer Bilinearform β ordnen wir dabei eine Linearform $\overline{\beta}$ zu, welche auf Tensoren $v \otimes w$ natürlich durch

$$\overline{\beta}(v \otimes w) = \beta(v, w)$$

definiert ist und linear auf ganz $V\otimes W$ fortgesetzt wird. Wir überzeugen uns davon, dass diese Zuordnung ein Isomorphismus ist.

Ist $\overline{\beta} = 0$, so ist insbesondere $\overline{\beta}(v \otimes w)$ für alle $(v, w) \in V \times W$, also $\beta = 0$. Ist umgekehrt eine Linearform ℓ auf $V \otimes W$ gegeben, so setzen wir

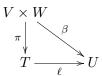
$$\beta(v, w) := \ell(v \otimes w)$$
.

Dies ist eine Bilinearform und erfüllt $\overline{\beta} = \ell$.

Dies ist eine weitere Möglichkeit, Tensorprodukte einzuführen.

Satz 1.4. [Universelle Eigenschaft des Tensorprodukts] Es seien U, V und W drei \mathbb{K} -Vektorräume. Dann gibt es einen \mathbb{K} -Vektorraum T mitsamt einer bilinearen Abbildung

 $\pi\colon V\times W\to T$, so dass für jede bilineare Abbildung $\beta\colon V\times W\to U$ genau eine lineare Abbildung $\ell\colon T\to U$ existiert, so dass $\beta=\ell\circ\pi$.



Ist T' ein weiterer solcher Raum mit zugehörigem π' , so gibt es einen Isomorphismus $I: T \to T'$, so dass $I \circ \pi = \pi'$.

Beweis. Dieser Raum T wird natürlich das Tensorprodukt $V \otimes W$ sein, während π durch $(v,w) \mapsto v \otimes w$ gegeben ist. Nach obigem Beispiel wäre damit bereits die Existenz bewiesen, wenn wir uns auf $U = \mathbb{K}$ beschränken. Für einen allgemeinen Zielraum können wir das Argument jedoch im selben Wortlaut durchführen.

Für die Eindeutigkeit sehen wir zunächst, dass zu $\pi' \colon V \times W \to T'$ eine lineare Abbildung $I \colon T \to T'$ existiert, so dass $\pi' = I \circ \pi$. Umgekehrt gibt es auch ein $I' \colon T' \to T$, so dass $\pi = I' \circ \pi'$. Aus der Eindeutigkeit der Abbildungen ℓ ergibt sich $I' \circ I = \operatorname{Id}_T$ und $I \circ I' = \operatorname{Id}_{T'}$.

Da das Tensorprodukt $V \otimes W$ also durch die obige Eigenschaft (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmt ist, könnte man diese auch zur Definition verwenden. Diese mag eleganter sein, ist aber auch weniger anschaulich.

Nützlich ist auch die Angabe einer Basis.

Satz 1.5. Es seien $(v_i)_{i\in I}$ und $(w_j)_{j\in J}$ Basen von V und W mit beliebigen Indexmengen I und J. Dann bilden die

$$v_i \otimes w_j$$
, $i \in I, j \in J$

eine Basis von $V \otimes W$.

Beweis. Alle $v \in V$ und $w \in W$ sind als Linearkombinationen der v_i bzw. w_j darstellbar und so auch jedes $v \otimes w$ durch Ausmultiplizieren. Dies überträgt sich auf sämtliche Elemente von $V \otimes W$.

Dieses Erzeugendensystem ist außerdem minimal. Wir wählen duale Basen bestehend aus v_i^* und w_j^* . Für feste i und j ist dann durch $v \otimes w \mapsto v_i^* v \cdot w_j^* w$ eine Linearform auf $V \otimes W$ gegeben, welche nicht Null ist, aber auf dem gesamten Erzeugendensystem außer $v_i \otimes w_j$ verschwindet.

Korollar 1.6. Es ist

$$\dim(V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W,$$

wobei wir uns hier auf $\infty \cdot 0 = 0$ einigen.

Vektoren v und w können wir durch ihre Koeffizienten α_i und β_j aus den Basisdarstellungen $v = \sum_i \alpha_i v_i$ und $w = \sum_j \beta_j w_j$ beschreiben. Das Tensorprodukt wird dann über

$$v \otimes w = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j v_i \otimes w_j$$

durch die Koeffizienten $\alpha_i \beta_j$, $(i, j) \in I \times J$, beschrieben.

Dies erlaubt bereits eine Veranschaulichung im Endlichdimensionalen. Sind zwei Vektoren $v=(v_i)_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n$ und $w=(w_j)_{j=1}^m \in \mathbb{R}^m$ gegeben, so können wir ihr Tensorprodukt als Matrix

$$A := (a_{ij})_{i=1,j=1}^{n,m} := (v_i w_j)_{i=1,j=1}^{n,m} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

auffassen. Tatsächlich entspricht diese Matrix dem Produkt

$$A = vw^{\mathrm{T}}$$
.

Wir identifizieren also $v \otimes w$ und vw^{T} . Insbesondere identifizieren wir heimlich den Spaltenvektor $w \in \mathbb{R}^m$ mit dem Zeilenvektor $w^{\mathrm{T}} \in (\mathbb{R}^m)^*$.

Solche Matrizen vw^{T} sind stets von Rang Eins (ihr Bild ist der Spann von v). Fassen wir Tensorprodukte $v \otimes w + v' \otimes w'$ als Matrizen auf, so können wir jedoch Rang Zwei erreichen, wenn das Bild dieser Matrix der Spann von v und v' ist. Dies motiviert den Begriff des Tensorrangs.

Bemerkung 1.7. Ist $T \in V \otimes W$ ein Tensor, so bezeichnen einige Autoren die kleinste Zahl r, für welche es eine Darstellung

$$T = \sum_{i=1}^{r} v_i \otimes w_i$$

gibt, als den Rang des Tensors T. Oftmals wird als Rang jedoch die Anzahl der beteiligten Faktoren bezeichnet. Bisher haben stets nur einen Faktor (in V oder W) oder zwei (in $V \otimes W$) betrachtet. Diese Zahl kann alternativ als Stufe des Tensors bezeichnet werden. Wir werden allerdings glücklicherweise keinen dieser Begriffe mehr benötigen.

Beispiel 1.8. Ein Zahlenbeispiel ist durch

$$\begin{pmatrix} 1\\3\\2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 5\\7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7\\15 & 21\\10 & 14 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Wir kommen nun endlich zu weiteren Beispielen und konkreten Interpretationen.

Beispiel 1.9. Wir wählen $V = \mathbb{K}[X]$ und $W = \mathbb{K}[Y]$, d.h. beide Vektorräume sind der Polynomraum, wobei wir für eine bessere Unterscheidung verschiedene Variablennamen verwenden. Dann behaupten wir

$$V \otimes W = \mathbb{K}[X, Y]$$

oder genauer gesagt: Es gibt einen (kanonischen) Isomorphismus zwischen diesen beiden Räumen. Hierzu bilden wir natürlich

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X^i \otimes \sum_{j=1}^{m} \beta_j Y^j \quad \text{auf} \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j X^i Y^j$$

ab.

Beispiel 1.10. Sind M und M' zwei Mengen und V und V' zwei \mathbb{K} -Vektorräume, so ist

$$Abb(M, V) \otimes Abb(M', V') = Abb(M \times M', V \otimes V')$$
.

Hierzu setzen wir

$$(f \otimes g)(m, m') = f(m)g(m').$$

Insbesondere ist

$$Abb(M, \mathbb{K}) \otimes Abb(M', \mathbb{K}) = Abb(M \times M', \mathbb{K}).$$

Besonders interessant für uns ist das Tensorprodukt zweier linearer Abbildungen $A \in \text{Hom}(V, W)$ und $B \in \text{Hom}(V', W')$, welches wir über

$$A \otimes B \colon V \otimes V' \to W \otimes W', \ v \otimes v' \mapsto Av \otimes Bv'$$

definieren.

Wir wollen nun Tensorprodukte linearer Abbildungen in Koordinaten angeben. Wir betrachten also $V = \mathbb{K}^n$, $V' = \mathbb{K}^{n'}$, $W = \mathbb{K}^m$ und $W' = \mathbb{K}^{m'}$ mit Basisvektoren v_i , $v'_{i'}$, w_j und $w'_{i'}$. Nun sind A und B als Matrizen

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$$
 und $B = (b_{i'j'}) \in \mathbb{R}^{m' \times n'}$

gegeben. Um $A \otimes B$ darzustellen, benötigen wir eine Ordnung der Produktbasen $(v_i v'_{i'})$ und $(w_i w'_{i'})$. Diese sortieren wir lexikographisch, also z.B.

$$v_1v_1', v_1v_2', v_1v_3', v_2v_1'v_2v_2', v_2v_3'$$

für n=2 und n'=3. Die Wirkung von $A\otimes B$ auf $v_i\otimes v'_{i'}$ ist jedenfalls durch

$$(A \otimes B)(v_i \otimes v'_{i'}) = Av_i \otimes Bv'_{i'} = \sum_j a_{ij} w_j \otimes \sum_{j'} b_{i'j'} w'_{j'}$$

gegeben. Der Eintrag an der Stelle (ii'), (jj') von $A \otimes B$ ist also

$$(A \otimes B)_{(ii')(jj')} = a_{ij}b_{i'j'}.$$

Als Beispiel in Dimension Zwei:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix}$$

Ein schöneres Beispiel für die Benutzung von Tensorprodukten liegt in der Erweiterung des Grundkörpers. Wählen wir z. B. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und fassen \mathbb{C} als \mathbb{R} -Vektorraum auf, so können wir für jeden reellen Vektorraum V das Tensorprodukt

$$V_{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$$

bilden, wobei wir den Index $\mathbb R$ anfügen, um den zugrundeliegenden Körper zu kennzeichnen. Anschaulich besteht $V_{\mathbb C}$ aus Vektoren von V, welche wir mit einer komplexen Zahl multipliziert haben. Wir stellen uns vor, dass wir nun auch mit komplexen Skalaren multiplizieren können, dass $V_{\mathbb C}$ also ein komplexer Vektorraum ist. Für $z\otimes v\in V_{\mathbb C}$ und $\alpha\in\mathbb C$ setzen wir tatsächlich

$$\alpha(z\otimes v)=(\alpha z)\otimes v\,,$$

erhalten also eine komplexe Struktur auf $V_{\mathbb{C}}$ (wobei wir die komplexe Skalarmultiplikation natürlich wieder auf das gesamte Tensorprodukt fortsetzen müssen).

Wir kommen auf allgemeine Identifizierungen zurück.

Satz 1.11. Es seien V und W zwei K-Vektorräume. Dann ist

$$V^* \otimes W \cong \operatorname{Hom}(V, W)$$
.

Beweis. Wir setzen

$$(v^* \otimes w)(v) := v^*v \cdot w$$

und erhalten (durch lineare Fortsetzung) so eine Abbildung $V^* \otimes W \to \operatorname{Hom}(V, W)$. Wir bemerken nebenbei $\operatorname{Kern}(v^* \otimes w) = \operatorname{Kern}(v^*)$ und $\operatorname{Bild}(v^* \otimes w) = \operatorname{span}(w)$.

Um zu sehen, dass dies ein Isomorphismus ist, wählen wir Basen (v_i) und (w_j) von V und W und eine dazugehörige duale Basis (v_i^*) von V^* . Die Bilder von $v_i^* \otimes w_j$ sind nach der gemachten Bemerkung unabhängig. Sie bilden außerdem eine Basis von Hom(V, W): Ein jedes $\phi \in \text{Hom}(V, W)$ können wir als

$$\phi = \sum_{i} v_i^* \otimes \phi(v_i)$$

schreiben.

Korollar 1.12. Es ist

$$(V \otimes W)^* \cong V^* \otimes W^*$$
.

Eine Bilinearform auf $V \times W$ ist nämlich nicht anderes als eine lineare Abbildung $V \to W^*$. Man vergleiche diese Ergebnisse mit der obigen Erläuterung, Elemente von $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ (oder besser $\mathbb{R}^n \otimes (\mathbb{R}^n)^*$) als Matrizen aufzufassen.

Wir geben letztlich noch ein Anwendungsbeispiel (eine frühere Hausaufgabe, die mit unserer Theorie geradezu trivial wird), für welches wir allerdings noch ein Lemma benötigen. Dieses ist recht elementar, wird in den einführenden Kursen aber selten behandelt oder benötigt.

Lemma 1.13. Es sei V ein Vektorraum und $f, g \in V^*$. Gilt $\operatorname{Kern} g \subset \operatorname{Kern} f$, so folgt bereits $f = \lambda g$ für einen Skalar λ .

Beweis. Im Falle von $g \neq 0$ können wir ein $v_0 \in V$ finden, so dass $V = \text{Kern } g \oplus \text{span}(v_0)$, denn dim $V/\text{Kern } g = \dim \text{Bild } g = 1$. Setze nun

$$\lambda = \frac{f(v_0)}{g(v_0)} \, .$$

Korollar 1.14. Es sei V ein reeller Vektorraum mit zwei Skalarprodukten s_1 und s_2 . Folgt aus $s_1(v, w) = 0$ stets $s_2(v, w) = 0$, so gilt bereits $s_2 = \lambda s_1$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beweis. Folgt mit $s_1, s_2 \in (V \otimes V)^*$ sofort aus obigem Lemma.

Insbesondere ist der Beweis dieser Aussage unabhängig von der Dimension von V und kann offenbar sogar auf Bilinearformen (anstelle von Skalarprodukten) verallgemeinert werden.

Soviel zur Theorie der Tensorprodukte zweier Vektorräume. Wie der Name "multilineare Algebra" vermuten lässt, beschränkt man sich jedoch nicht nur auf bilineare Objekte, sondern definiert auch Tensorprodukte wie $U \otimes V \otimes W$ oder ganz allgemein $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$. Die Definition dieser Produkte möge sich jeder selbst überlegen; anhand der direkten

Definition oder anhand von Satz 1.4. Man mache sich auch klar, dass man $U \otimes V \otimes W$ auch als $(U \otimes V) \otimes W$ oder als $U \otimes (V \otimes W)$ definieren kann.

Das n-fache Tensorprodukt von V mit sich selbst bezeichnen wir als $V^{\otimes n}$. Es ist also $V \otimes V = V^{\otimes 2}$.

1.2 Symmetrische und alternierende Produkte

Besonders wichtige Klassen von Tensoren bilden die symmetrischen bzw. antisymmetrischen. Hierzu betrachten wir die n-te Tensorpotenz $V^{\otimes n}$. Die Idee ist: Vertauschen wir die Positionen zweier Faktoren und erhalten wir denselben Tensor, so heißt er symmetrisch. Ändert er sein Vorzeichen, so heißt er antisymmetrisch. Ein kleines Problem hierbei liegt nur darin, dass nicht jeder Tensor ein $reiner\ Tensor$ ist, also als $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ darstellbar ist.

Definition 1.15. Es sei $\pi \in S_n$ eine Permutation und V ein Vektorraum über einem Körper K, in welchem $1 + 1 \neq 0$ gilt. Dann wird durch

$$P_{\pi} \colon V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}, \ v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto v_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\pi(n)}$$

ein Endomorphismus auf $V^{\otimes n}$ definiert. Ist nun $T \in V^{\otimes n}$ ein Tensor, so heißt T symmetrisch, falls $P_{\pi}T = T$ für alle $\pi \in S_n$. Gilt $P_{\pi}T = \operatorname{sgn} \pi T$ für alle $\pi \in S_n$, so heißt T antisymmetrisch.

Bemerkung 1.16. Ist π eine Transposition, so ist $P_{\pi}^2 = \text{Id}$, womit P_{π} nur die Eigenwerte ± 1 haben darf. Für n=2 ist daher jeder Tensor als Summe eines symmetrischen und eines antisymmetrischen Tensors darstellbar. Für n>2 ist dies jedoch nicht mehr möglich, was daherrührt, dass S_n nicht kommutativ ist, d. h. auch die Operatoren P_{π} kommutieren nicht.

Bemerkung 1.17. Stellen wir einen Tensor n-ter Stufe in einer Basis durch Koordinaten a_{i_1}, \ldots, a_{i_n} dar, so ist dessen Bild unter P_{π} durch die Koordinaten $a_{\pi^{-1}(i_1), \ldots, \pi^{-1}(i_n)}$ gegeben (man überzeuge sich hiervon). Für n=2 enspricht der zur Transposition gehörige Operator also dem Transponieren einer Matrix. Es lässt sich also jede Matrix als Summe einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Matrix darstellen.

Beispiel 1.18. Es sei $V = \mathbb{R}^n$. Dann ist $e_1 \otimes e_1 \otimes e_1$ symmetrisch, ebenso $e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$. Dagegen ist $e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$ antisymmetrisch, während $e_1 \otimes e_2$ weder symmetrisch noch antisymmetrisch ist. Der Nullvektor ist sowohl symmetrisch als auch antisymmetrisch.

Nachdem wir uns nun ein wenig mit der Idee der Antisymmetrie vertraut gemacht haben, beschäftigen wir uns nun damit, dass wir in der obigen Definition den Fall 1+1=0 ausgeschlossen haben. Wäre dies der Fall, so wäre 1=-1 und Antisymmetrie und Symmetrie würden sich nicht unterscheiden. Wir führen deshalb die eigentliche Definition ein.

Definition 1.19. Es sei V ein beliebiger K-Vektorraum und $\phi \colon V^n \to K$ eine multilineare Abbildung. Ändern sich die Werte von ϕ nicht, wann immer wir zwei Argumente vertauschen, so heißt ϕ symmetrisch. Nimmt ϕ den Wert Null an, sobald zwei Argumente gleich sind, so heißt ϕ alternierend.

Indem wir Tensorprodukte mit multilinearen Abbildungen identifizieren, erweitern sich diese beiden Begriffe auch auf Tensorprodukte.

Übungsaufgabe 1.1. Zeige, dass die hier definierten Begriffe die obigen verallgemeinern. Finde außerdem eine bilineare Abbildung $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, welche symmetrisch, aber nicht alternierend ist.

Wir führen nun die symmetrischen und alternierenden Produkte von Vektorräumen ein. Dazu nehmen wir uns zuerst die Tensorpotenz $V^{\otimes n}$ und sorgen durch Quotientenbildung dafür, dass alles darin symmetrisch bzw. alternierend wird.

Definition 1.20. Es sei V ein Vektorraum und $S(V^{\otimes n}) \subset V^{\otimes n}$ derjenige Raum, der von allen Tensoren der Form

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) - (v_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\pi(n)})$$

mit $\pi \in S_n$ erzeugt wird. Dies sind genau die Tensoren, die für Symmetrie zu Null werden sollten und wir definieren das symmetrische Produkt

$$V \odot \cdots \odot V := \operatorname{Sym}^n(V) := V^{\otimes n} / S(V^{\otimes n})$$
.

Analog sei $A(V^{\otimes n})$ der Raum, welcher von Tensoren

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$$

mit zwei gleichen Faktoren $v_i = v_j$ für zwei $i \neq j$ aufgespannt wird. Hierüber definieren wir das alternierende Produkt

$$V \wedge \cdots \wedge V = \bigwedge^n V := V^{\otimes n} / A(V^{\otimes n})$$
.

Bemerkung 1.21. Auf diese Weise erhalten wir Quotientenabbildungen $V^{\otimes n} \to \operatorname{Sym}^n(V)$ bzw. $V^{\otimes n} \to \bigwedge^n(V)$, deren Kerne gerade $S(V^{\otimes n})$ bzw. $A(V^{\otimes n})$ sind. Lässt insbesondere eine lineare Abbildung auf $V^{\otimes n}$ einen dieser Unterräume invariant, so induziert sie eine lineare Abbildung auf dem entsprechenden Quotientenraum.

Beispiel 1.22. Es sei A ein Endomorphismus von V. Den Endomorphismus von $V^{\otimes n}$, der durch $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto Av_1 \otimes \cdots \otimes Av_n$ gegeben ist, nennen wir $A^{\otimes n}$. Gilt $v_i = v_j$, so natürlich auch $Av_i = Av_j$, weshalb wir einen Endomorphismus auf $\bigwedge^n(V) = V^{\otimes n}/A(V^{\otimes n})$ erhalten.

Übungsaufgabe 1.2. Es sei V ein d-dimensionaler Vektorraum. Zeige dim $\operatorname{Sym}^2(V) = \frac{n(n+1)}{2}$ und dim $\bigwedge^2(V) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Übungsaufgabe 1.3. Es sei $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$. Zeige, dass

$$\frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} v_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\pi(n)}$$

symmetrisch und

$$Alt(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) := \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi) v_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\pi(n)}$$

alternierend ist.

Übungsaufgabe 1.4. Es seien ω und η zwei symmetrische Tensoren. Zeige, dass die Restklasse $\omega \odot \eta$ (das symmetrische Produkt) durch die Symmetrisierung von $\omega \otimes \eta$ gegeben ist. Mit anderen Worten: Die Symmetrisierung von $\omega \otimes \eta$ ist ein symmetrischer Repräsentant von $\omega \odot \eta$.

Es seien nun ω und η zwei alternierende Tensoren der Stufen n bzw. m. Zeige, dass die Restklasse von $\omega \otimes \eta$ in $\bigwedge^n(V)$ durch die Antisymmetrisierung $\mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta)$ gegeben ist. Dieses Produkt ist jedoch nicht assoziativ, weshalb man

$$\omega \wedge \eta := \frac{(m+n)!}{m!n!} \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta) = \frac{1}{m!n!} (\omega \otimes \eta - \eta \otimes \omega)$$

definiert.

Hier ist ein Beispiel nötig.

Beispiel 1.23. Wir betrachten $V = (\mathbb{R}^2)^*$, den Dualraum von \mathbb{R}^2 . Wir bezeichnen mit dx die Abbildung $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x$ und mit dy die Abbildung $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y$. Dann ist

$$\mathrm{d}x\otimes\mathrm{d}y\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right)=\mathrm{d}x(x_1,y_1)\mathrm{d}y(x_2,y_2)=x_1y_2,$$

$$dx \odot dy \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = \frac{dx(x_1, y_1)dy(x_2, y_2) + dy(x_1, y_1)dx(x_2, y_2)}{2} = \frac{x_1y_2 + x_2y_1}{2},$$

$$\operatorname{Alt}(dx \otimes dy) \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = \frac{dx(x_1, y_1)dy(x_2, y_2) - dy(x_1, y_1)dx(x_2, y_2)}{2} = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{2}$$

und

$$dx \wedge dy \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = dx(x_1, y_1) dy(x_2, y_2) - dy(x_1, y_1) dx(x_2, y_2) = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Symmetrische und alternierende Produkte lassen sich auch ohne Tensorprodukte analog zu Satz 1.4 definieren. Man ersetzt dabei "bilinear" (bzw. "multilinear") durch "symmetrisch" oder "alternierend".

Übungsaufgabe 1.5. Es sei dim $V = d < \infty$. Zeige dim $\bigwedge^n(V) = \binom{d}{n}$.

1.3 Anwendungen

1.3.1 Determinanten

Wie man sich spätestens nach der Wahl einer Basis klar macht, hat $\bigwedge^n V$ für einen n-dimensionalen Raum V die Dimension Eins. Ein Endomorphismus auf $\bigwedge^n V$ ist also nicht weiter als die Multiplikation mit einer bestimmten Zahl. Ist der Endomorphismus durch $A^{\otimes n}$ gegeben (siehe Beispiel 1.22), so nennen wir diese Zahl die *Determinante* det A von A.

Gelegentlich wird die Notation

$$det(V) := \bigwedge^{n}(V)$$

benutzt

Es sei nun $(e_i)_{i=1}^n$ eine Basis von V und $A \in \text{End}(V)$ habe die Matrixdarstellung (a_{ij}) . Dann ist

$$Ae_1 \wedge \cdots \wedge Ae_n = \det(A)e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$$
.

Die linke Seite ist jedoch

$$\sum_{i} a_{i1}e_{i} \wedge \cdots \wedge \sum_{i} a_{in}e_{i} = \sum_{\pi \in S_{n}} a_{\pi(1)1} \cdots a_{\pi(n)n}e_{\pi(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\pi(n)},$$

denn alle Produkte, in denen zwei gleiche Indizes stehen (bei denen die Indizes also keine Permutation bilden), werden zu Null. Diesen Ausdruck schreiben wir schließlich als

$$\sum_{\pi \in S_n} a_{\pi(1)1} \cdots a_{\pi(n)n} \operatorname{sgn}(\pi) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n,$$

womit

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{\pi(1)1} \cdots a_{\pi(n)n}$$

gelten muss. Tauschen wir π durch $\sigma := \pi^{-1}$ aus und nutzen wir $\operatorname{sgn}(\pi^{-1}) = \operatorname{sgn}(\pi)$, ist dies auch dasselbe wie

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Diese Zahl wird auch als Determinante der Matrix (a_{ij}) bezeichnet.

Sind $A, B \in \text{End}(V)$, so ist $(AB)^{\otimes n} = A^{\otimes n}B^{\otimes n}$, also

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

1.3.2 Differentialformen

Die vielleicht wichtigste Anwendung der multilinearen Algebra innerhalb der Mathematik ist die Theorie der Differentialformen. Eine Differentialform sollte dabei ein Objekt sein, welches integriert wird. Für eine solche Integration wollen wir also das n-dimensionale Volumen von wasauchimmer bestimmen. Dieses wasauchimmer zerlegen wir dazu in Parallelepipede (wie ein Parallelegramm oder ein Spat, nur in beliebiger Dimension), welcher durch Vektoren v_1, \ldots, v_n aufgespannt wird. Das Volumen eines solches Parallelepipeds sollte linear in jedem einzelnen Vektor sein, invariant unter Scherung sein und Null werden, wenn zwei der Vektoren identisch sind. Dies beschreibt gerade die alternierenden Multilinearformen.

Dies mag als kleine Motivation dienen, eine Differentialform zu definieren.

Definition 1.24. Eine k-(Differential-)Form ω auf \mathbb{R}^n ist eine differenzierbare Abbildung, welche einem Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ eine alternierende k-Linearform ω_p auf \mathbb{R}^n abbildet.

Wir wollen die alternierende Form ω_p an den Punkt p angeheftet denken. Verallgemeinert man Differentialformen nun auf Mannigfaltigkeiten, so lebt ω_p nicht mehr auf \mathbb{R}^n , sondern auf dem Tangentialraum am Punkt p.

Definition 1.25. Eine k-Form ω auf einer Mannigfaltigkeit M ist eine differenzierbare Abbildung, welche einem Punkt $p \in M$ eine alternierende k-Linearform ω_p auf T_pM abbildet. Eine 0-Form ist eine Funktion.

Eine k-Form verlangt also an jedem Punkt p der Mannigfaltigkeit k Tangentialvektoren als Argument. So können wir eine k-Form auch auf k Vektorfelder anwenden.

Eine wichtige Verknüpfung von Differentialprodukten ist das Hut-, Dach-, Wedge- bzw. äußere Produkt \wedge . Wählen wir um p Koordinaten x^1, \ldots, x^n , so ist d x^i diejenige Abbildung, die einen Tangentialvektor auf seine i-te Komponente in diesen Koordinaten abbildet. Die 1-Formen werden daher (lokal) durch d x^1, \ldots, dx^n aufgespannt, die 2-Formen durch Differentialformen der Bauart d $x^i \wedge dx^j$, i < j. Allgemein lässt sich eine k-Form ω also als

$$\omega = \sum_{|I|=k} \omega_I dx^I = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

schreiben. Wir definieren dann eine (k+1)-Form d ω als

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} d\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

wobei $\mathrm{d} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} f \mathrm{d} x^i$ das totale Differential ist.

Insbesondere ist z. B. $d(dx^1) = 0$ bzw. allgemeiner " $d^2 = 0$ ".

Beispiel 1.26. Es sei

$$f = 3(x^2)^2 x^1 + \sin x^1.$$

Dann ist

$$df = (3(x^2)^2 + \cos x^1)dx^1 + 6x^1x^2dx^2.$$

Für

$$\omega = x^2 \mathrm{d}x^1 + \mathrm{e}^{2x^2} \mathrm{d}x^2$$

ist

$$d\omega = dx^2 \wedge dx^1 + 3e^{2x^2}dx^2 \wedge dx^2 = -dx^1 \wedge dx^2.$$

Übungsaufgabe 1.6. Es sei f eine Funktion,

$$\omega_1 = g_1 \, \mathrm{d} x^1 + g_2 \, \mathrm{d} x^2 + g_3 \, \mathrm{d} x^3$$

und

$$\omega_2 = h_1 \mathrm{d} x^2 \wedge \mathrm{d} x^3 + h_2 \mathrm{d} x^3 \wedge \mathrm{d} x^1 + h_3 \mathrm{d} x^1 \wedge \mathrm{d} x^2.$$

Bestimme $d\omega_1$ und $d\omega_2$ und erkläre wieso sich df mit grad f, $d\omega_1$ mit rot g und $d\omega_2$ mit div h identifizieren lässt.

Abschließend bemerken wir, dass nun aus dem Satz von Stokes,

$$\int_{M} \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega \,,$$

mit diesen Identifizieren die klassischen Integralsätze folgen.

2 Darstellungstheorie

2.1 Erinnerung: Gruppen

2.2 Darstellungen von Gruppen

Definition 2.1. Es sei G eine Gruppe. Eine Darstellung von G ist ein Gruppenhomomorphismus

$$G \to \operatorname{GL}(V) = \operatorname{Aut}(V)$$

in die Automorphismengruppe eines Vektorraums.

Insbesondere ist eine Darstellung eine Gruppenwirkung. Man kann eine Darstellung durchaus als lineare Wirkung auf einem Vektorraum bezeichnen.

Meist werden wir auch den Vektorraum V selbst als Darstellung bezeichnen.

Beispiel 2.2. Bilden wir ein jedes Element von G auf die Identität ab, so haben wir die triviale Darstellung einer Gruppe gefunden.

Eine mögliche Darstellung von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ oder z. B. $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ ist offensichtlich.

Die symmetrische Gruppe S_2 kann durch Spiegelung an einer (Hyper-)Ebene wirken.

Die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ können wir durch Drehungen in der Ebene darstellen.

Lassen wir \mathbb{R}^n durch Translation auf sich selbst wirken, so ist dies keine Gruppendarstellung, da diese Wirkung nicht linear ist.

Literatur

[Aluf09] P. Aluffi, Algebra: Chapter 0, American Mathematical Society (2009)

[Brie83] E. Brieskorn, Lineare Algebra und analytische Geometrie 1, Vieweg (1983)

[Brie85] E. Brieskorn, Lineare Algebra und analytische Geometrie 2, Vieweg (1985)

[FuHa91] W. Fulton, J. Harris, Representation Theory – A First Course, Springer (1991)

[OeRe74] E. Oeljeklaus, R. Remmert, Lineare Algebra 1, Springer (1974)