13. Tutorium ITPDG

Alternative Lösung der ersten Aufgabe

Setzen wir $u(x,t) = X(x)T(t)$, so erhalten wir $u(x,0) = X(x)T(0) = 5\sin\frac{3}{2}x$, also

$$X(x) = \frac{5}{T(0)}\sin\frac{3}{2}x\,.$$

Auch muss $X\ddot{T} = 4X''T$ sein, weshalb

$$\frac{X''}{X} = \frac{\ddot{T}}{4T} =: \lambda$$

konstant ist. Wir können jedoch bereits $X'' = -\frac{9}{4}X$ beobachten, also $\lambda = -\frac{9}{4}$. Wir erhalten damit $\ddot{T} = -9T$, was uns

$$T = c_1\cos 3t + c_2\sin 3t = T(0)\cos 3t + c_2\sin 3t$$

liefert. Die Bedingung $u_t(x,0) = 0$ wird zu $\dot{T}(0) = 0$ (denn es ist nicht $X \equiv 0$). Aus $\dot{T}(0) = 3c_2$ erhalten wir jedoch $c_2 = 0$. Insgesamt ist

$$u(x,t) = X(x)T(t) = \frac{5}{T(0)}\sin\frac{3}{2}x \cdot T(0)\cos 3t = 5\sin\frac{3}{2}x\cos 3t\,.$$

Insbesondere ergibt sich $u(0,t) = u(2\pi,t) = 0$ *automatisch.*

Lösung der zweiten Aufgabe

a) Für $u(x,t) = X(x)T(t)$ erhalten wir

$$X\ddot{T} = xX'T\,,$$

also

$$\frac{xX'}{X} = \frac{\ddot{T}}{T} = \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Insbesondere ergibt sich $\ddot{T} = \lambda T$.

Für $\lambda > 0$ hat dies die Lösungen $T(t) = c_1\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}t} + c_2\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}t}$, was abgesehen von der Nulllösung niemals periodisch ist.

Für $\lambda = 0$ finden wir die Lösungen $T(t) = c_1 + c_2 t$, was nur für $c_2 = 0$ periodisch (und sogar konstant ist). In diesem Fall haben wir außerdem $xX' = 0$, also auch $X = \text{const}$. Insbesondere ist auch u konstant.

Für $\lambda < 0$ schließlich erhalten wir

$$T(t) = c_1\cos\sqrt{-\lambda}t + c_2\sin\sqrt{-\lambda}t$$

als Lösungen – diese sind stets periodisch. Für X erhalten wir aus $X' = \frac{\lambda}{x}X$ die bis auf Vielfache eindeutige Lösung

$$X(x) = \mathrm{e}^{\lambda\ln x} = x^\lambda\,,$$

womit sich

$$u(x,t) = x^\lambda\left(c_1\cos\sqrt{-\lambda}t + c_2\sin\sqrt{-\lambda}t\right)$$

ergibt.

b) Ist u nun konstant, so muss $u \equiv 0$ sein. Für $\lambda < 0$ hingegen erhalten wir

$$u(x,0) = x^\lambda c_1 = 0\,,$$

also $c_1 = 0$. Es verbleibt

$$u(x,\pi) = x^\lambda c_2 \sin\sqrt{-\lambda}\pi = 0\,,$$

womit entweder $c_2 = 0$ oder $\sqrt{-\lambda}$ eine natürliche Zahl sein muss, welche wir $n \in \mathbb{N}$ nennen. In letzterem Fall $\lambda = -n^2$ erhalten wir also

$$x^{-n^2} \sin nt$$

als Lösung. Durch Ausnutzung der Linearität der Differentialgleichung ist auch

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{-n^2} \sin nt$$

eine Lösung (falls diese Reihe konvergiert).

c) Wir setzen nun $u(1,t) = \sin t + 3\sin 3t$ in diese Reihendarstellung ein und erhalten

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nt = \sin t + 3\sin 3t\,.$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt $c_1 = 1$ und $c_3 = 3$; alle anderen Konstanten verschwinden. Letztlich erhalten wir

$$u(x,t) = 1 \cdot x^{-1^2} \sin 1t + 0 + 3x^{-3^2} \sin 3t = \frac{\sin t}{x} + \frac{3\sin 3t}{x^9}$$

als Lösung unseres Problems.