11. Tutorium ITPDG

Integraltransformationen

Mit der Laplace-Transformation und der Fourier-Tranformation kennen wir nun bereits zwei Integraltransformationen. Wir erinnern an ihre Definition. Für $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ heißt

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

die Laplace-Transformierte von f und für eine Schwartz-Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ nennen wir

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^\infty f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

die Fourier-Transformierte von f. Diese beiden Transformationen können wir zusammenfassen: Für geeignete Mengen $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$ sei $k\colon D_1 \times D_2 \to \mathbb{C}$ eine fest vorgegebene Funktion. Eine Funktion $f\colon D_1 \to \mathbb{C}$ können wir dann zu einer neuen Funktion $T_k[f]\colon D_2 \to \mathbb{C}$ transformieren, indem wir

$$T_k[f](\xi) = \int_{D_1} f(x)k(x,\xi)\,\mathrm{d}x$$

setzen (falls dieses Integral existiert). Mit anderen Worten: Wir nehmen eine Funktion f, multiplizieren sie mit einer fest gewählten Funktion k und integrieren über den Definitionsbereich. Dabei ist k die *Kernfunktion* und T_k die zugehörige Transformation. Die Laplace- und die Fourier-Transformation erhalten wir – unter Voraussetzung der Existenz der auftretenden Integrale – wie folgt:

Transformation	D_1	D_2	k
Laplace	$[0,\infty)$	$\mathbb{C}$	$k(t,s) = \mathrm{e}^{-st}$
Fourier	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$k(t,\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$

Tatsächlich kennen wir sogar bereits weitere Integraltransformationen: Die Faltung $f * g$ bei festgehaltenem $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^\infty f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

definiert ist, und die Abbildung von f auf diejenige Stammfunktion F, die durch

$$F(t) = \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

gegeben ist:

Transformation	D_1	D_2	k
Laplace	$[0,\infty)$	$\mathbb{C}$	$k(t,s) = \mathrm{e}^{-st}$
Fourier	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$k(t,\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$
$f \mapsto f * g$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$k(\tau,t) = g(t-\tau)$
$f \mapsto f * g$	$[0,\infty)$	$[0,\infty)$	$k(\tau,t) = g(t-\tau)$
$f \mapsto F$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$k(\tau,t) = \mathbb{1}_{[0,t]}$
$f \mapsto F$	$[0,\infty)$	$[0,\infty)$	$k(\tau,t) = 1$

Man beachte dabei, dass wir uns bei Faltungen oft auf $f, g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ einschränken. Auch ist die Abbildung von $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ auf eine Stammfunktion ein Spezialfall der Faltung mit der Heaviside-Funktion $g = u_0$.

Auch ist ein LTI-System stets eine Integraltransformation: Bezeichnen wir die Impulsantwort mit h, so bildet das System ja ein f auf die Faltung $f * h$ ab.

Lösung der ersten Aufgabe

Die Übertragungsmatrix B zum System

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + x_1 - 2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) & = h_1 \\ 2\ddot{x}_2 + x_2 + 2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) & = h_2 \\ x_1(0) = x_2(0) & = 0 \end{cases}$$

ist diejenige Matrix, welche $X = BH$ erfüllt, wobei $X := (X_1, X_2) := (\mathcal{L}[x_1], \mathcal{L}[x_2])$ und $H := (\mathcal{L}[h_1], \mathcal{L}[h_2])$. Die Laplace-Transformation des DGL-Systems liefert dazu

$$\begin{pmatrix} s^2X_1 + X_1 - 2s(X_2 - X_1) \\ 2s^2X_2 + X_2 + 2s(X_2 - X_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^2 - 2s + 1 & -2s \\ -2s & 2s^2 + 2s + 1 \end{pmatrix} X = H\,.$$

Daraus können wir

$$B = \begin{pmatrix} (s+1)^2 & -2s \\ -2s & s^2 + (s+1)^2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+1)^4 + s^2\big((s+1)^2 - 4\big)} \begin{pmatrix} s^2 + (s+1)^2 & 2s \\ 2s & (s+1)^2 \end{pmatrix}$$

ablesen.

Lösung der zweiten Aufgabe

Zunächst sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gerade Schwartz-Funktion. Da cos gerade und sin ungerade ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[g](\pm\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\cos(\mp\omega t)\,\mathrm{d}t \mp \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{\infty} g(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t\,, \end{aligned}$$

denn $g\cos$ ist gerade und $g\sin$ ungerade und das Integral einer ungeraden Funktion verschwindet. Ist $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ungerade, so erhalten wir analog

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[h](\pm\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\cos(\mp\omega t)\,\mathrm{d}t \mp \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t \\ &= \mp\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t = \mp 2\mathrm{i}\int_{0}^{\infty} h(t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Lösung der dritten Aufgabe

Wir schreiben zunächst

$$\frac{4}{25t^2 + 20t + 5} = \frac{4}{(5t+2)^2 + 1}\,,$$

was uns

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\frac{4}{25^2 + 20t + 5}\right](\omega) &= \frac{4}{5}\mathcal{F}\left[\frac{1}{(t+2)^2 + 1}\right]\left(\frac{\omega}{5}\right) \\ &= \frac{4}{5}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\frac{\omega}{5}}\mathcal{F}\left[\frac{1}{t^2+1}\right]\left(\frac{\omega}{5}\right) = \frac{4\pi}{5}\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\omega - |\omega|}{5}} \end{aligned}$$

beschert. Analog haben wir

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\frac{2}{9t^2 - 12t + 5}\right](\omega) &= \frac{2}{3}\mathcal{F}\left[\frac{1}{(t-2)^2 + 1}\right]\left(\frac{\omega}{3}\right) \\ &= \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\frac{\omega}{3}}\mathcal{F}\left[\frac{1}{t^2+1}\right]\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\omega + |\omega|}{3}}\,. \end{aligned}$$