10. Tutorium ITPDG

Was ist ein LTI-System?

Ein Operator $\mathcal{S}$, welcher eine (zeitabhängige) Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf eine (wieder zeitabhängige!) Funktion $\mathcal{S}[f]\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abbildet, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Es sei
$$\mathcal{S}\left[\int \alpha(k) f(k,t)\,\mathrm{d}k\right](\theta) = \int \alpha(k)\mathcal{S}[f(k,t)](\theta)\,\mathrm{d}k\,,$$
wobei $\mathcal{S}[f(k,t)]$ als Anwendung von $\mathcal{S}$ auf die Funktion $t \mapsto f(k,t)$ zu verstehen ist. (verallgemeinerte Linearität)

- Für alle τ sei
$$\mathcal{S}[f(t-\tau)](\theta) = \mathcal{S}[f(t)](\theta-\tau)\,. \quad \text{(Zeitinvarianz)}$$

Ein LTI-System $\mathcal{S}$ nennen wir außerdem *kausal*, falls $\mathcal{S}[f]$ Null ist, solange f nur Null ist, d. h. falls aus $f(t) = 0$, $t < t_0$, auch $\mathcal{S}[f](\theta) = 0$, $\theta < t_0$, folgt.

Was kann ein LTI-System?

Ein LTI-System $\mathcal{S}$ lässt sich in Faltungen „hineinziehen“:

$$\mathcal{S}[f * g] = \mathcal{S}[f] * g\,.$$

Der Beweis nutzt beide Eigenschaften eines LTI-Systems:

$$\begin{aligned} S\big[(f*g)(t)\big](\theta) &= \mathcal{S}\left[\int f(t-\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right](\theta) = \int \mathcal{S}[f(t-\tau)](\theta)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int \mathcal{S}[f(t)](\theta-\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \big(\mathcal{S}[f]*g\big)(\theta)\,. \end{aligned}$$

Da δ das neutrale Element der Faltung ist, $\delta * f = f * \delta = f$, ist besonders $\mathcal{S}[\delta]$ interessant, denn kennen wir diese *Impulsantwort*[1] $h := \mathcal{S}[\delta]$, so erhalten wir

$$\mathcal{S}[f] = \mathcal{S}[\delta * f] = \mathcal{S}[\delta] * f = h * f$$

für alle f. Ist $\mathcal{S}$ kausal, so ist $h(t) = 0$ für $t < 0$ und wir können die Laplace-Transformierte $H := \mathcal{L}[h]$ der Impulsantwort bilden, welche wir als *Übertragungsfunktion* bezeichnen. Mit dieser erhalten wir

$$\mathcal{L}\big[\mathcal{S}[f]\big] = \mathcal{L}[h * f] = \mathcal{L}[h]\mathcal{L}[f] = H\mathcal{L}[f]$$

für alle f. Weiterhin nennen wir $F := H(\mathrm{i}\cdot)\colon \omega \mapsto H(\mathrm{i}\omega)$ den *Frequenzgang*.

Lösung der ersten Aufgabe

Wir erkennen $\int_0^t \sin(t-\tau)y(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ als Faltung $(\sin * y)(t)$ wieder, wollen also die Gleichung

$$y - \sin * y = 1$$

[1] Die „Antwort“ des Systems auf den Dirac-Impuls

lösen. Durch Anwenden der Laplace-Transformation auf diese Gleichung erhalten wir mit der üblichen Schreibweise $Y := \mathcal{L}[y]$

$$Y - \mathcal{L}[\sin * y] = Y - \mathcal{L}[\sin](s)Y = \frac{1}{s}\,,$$

woraus sich mit $\mathcal{L}[\sin](s) = \frac{1}{s^2+1}$ die Gleichung

$$Y \cdot \left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right) = Y \cdot \frac{s^2}{s^2+1} = \frac{1}{s}$$

für die Laplace-Transformierte Y ergibt. Umgestellt erhalten wir $Y = \frac{s^2+1}{s^3} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}$, was nach der Rücktransformation schließlich

$$y = 1 + \frac{1}{2}t^2$$

ergibt.

Lösung der zweiten Aufgabe

(a) Wir führen abermals eine Laplace-Transformation mit $X := \mathcal{L}[x]$ durch und erhalten die transformierte Gleichung

$$sX - x(0) + X = \mathcal{L}\left[u_\tau(t)\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\right]\,.$$

Einsetzen von $x(0) = 0$ liefert nach Umstellen

$$X = \frac{1}{s+1}\mathcal{L}\left[u_\tau(t)\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\right]\,,$$

worin wir $\frac{1}{s+1}$ als Laplace-Transformierte $\frac{1}{s+1} = \mathcal{L}[\mathrm{e}^{-t}](s)$ erkennen. Dies ergibt

$$X = \mathcal{L}[\mathrm{e}^{-t}]\mathcal{L}\left[u_\tau(t)\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\right] = \mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{-t} * \left(u_\tau(t)\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\right)\right]\,,$$

was eine denkbar simple Rück-Transformation zu

$$x = \mathrm{e}^{-t} * \left(u_\tau(t)\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\right)$$

erlaubt. Dies können wir noch vereinfachen:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-\theta)} u_\tau(\theta)\mathrm{e}^{-(\theta-\tau)}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \begin{cases} 0 & t \le \tau \\ \int_\tau^t \mathrm{e}^{-(t-\theta)-(\theta-\tau)}\,\mathrm{d}\tau = (t-\tau)\mathrm{e}^{-(t-\tau)} & t > \tau \end{cases} \\ &= u_\tau(t)(t-\tau)\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\,. \end{aligned}$$

(b) Wir assoziieren zu diesem AWP dasjenige LTI-System $\mathcal{S}$, welches einer Funktion $f = f(t)$ die Lösung $x = x(t) =: \mathcal{S}[f](t)$ des AWPs

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + x(t) = f(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

zuweist. Da unsere Rechnung aus (a) für allgemeinere Inhomogenitäten gültig bleibt, sehen wir

$$\mathcal{S}[f](t) = \mathrm{e}^{-t} * f(t)\,.$$

Suchen wir nun die Impulsantwort h, welche ja $\mathcal{S}[f] = h * f$ erfüllen soll, so finden wir diese offenbar mit

$$h(t) = \mathrm{e}^{-t}\,.$$

Die Übertragungsfunktion H ergibt sich als Laplace-Transformierte von h zu

$$H(s) = \mathcal{L}[\mathrm{e}^{-t}](s) = \frac{1}{s+1}\,.$$

Lösung der dritten Aufgabe

Die Impulsantwort h des Systems $\mathcal{S}$ soll

$$(h * 1)(t) = (1 * h)(t) = \int_0^t 1 \cdot h(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t h(\tau)\,\mathrm{d}\tau = t^2$$

erfüllen. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefert uns also $h(t) = 2t$. Die Laplace-Transformierte hierzu, die Übertragungsfunktion H, kennen wir als

$$H(s) = \mathcal{L}[2t](s) = \frac{2}{s^2}\,.$$

Multiplizieren wir das Argument von H mit i, so finden wir den Frequenzgang F, welcher nämlich durch

$$F(\omega) = H(\mathrm{i}\omega) = \frac{2}{(\mathrm{i}\omega)^2} = -\frac{2}{\omega^2}$$

gegeben ist.

Lösung der vierten Aufgabe

(a) Wieder betrachten wir das zugehörige LTI-System welches eine Funktion e auf die Lösung i des AWPs

$$\begin{cases} Ri + L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i = e \\ i(0) = 0 \end{cases}$$

abbildet. Schreiben wir $I := \mathcal{L}[i]$ und $E := \mathcal{L}[e]$, so soll die gesuchte Übertragungsfunktion H also $I = HE$ erfüllen. Wir wollen daher I bestimmen, denn der dann ablesbare Faktor vor E wird die Übertragungsfunktion sein. Die Laplace-Transformation macht aus der DGL nun die Gleichung

$$RI + sLI - \underbrace{i(0)}_{=0} = E\,,$$

was wir zu

$$I = \frac{1}{L}\frac{1}{s+\frac{R}{L}}E$$

umstellen können. Dies liefert uns die Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{1}{L}\frac{1}{s+\frac{R}{L}}\,.$$

(b) Für konstantes $e(t) \equiv e_0$ ist $E(s) = \frac{e_0}{s}$, also

$$I = \frac{e_0}{L} \frac{1}{\left(s + \frac{R}{L}\right) s} = \frac{e_0}{L} \frac{L}{R} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{R}{L}} \right) = \frac{e_0}{R} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{R}{L}} \right)$$

nach Partialbruchzerlegung. Die Rück-Transformation gibt uns

$$i(t) = \frac{e_0}{R} \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L} t} \right) .$$

Anmerkungen zu den Hausaufgaben

Die Laplace-Transformierte von $t \sin t$ habt ihr bereits berechnet.

In den Aufgaben 2a) und 2c) kann es hilfreich sein, auf die Gleichungen die Laplace-Transformation anzuwenden, um zu überprüfen, ob die Gleichheit im Laplace-Bereich gilt.

Achtung: In Aufgabe 3 sind weder das LTI-System noch die Übertragungsfunktion noch die Impulsantwort mit $\mathcal{S}$, H oder h benannt. Wollt ihr diese Bezeichungen also verwenden, müsst ihr sie einführen!