Faltungen

Wir geben ein Beispiel für Faltungen; zunächst im Diskreten: Irgendjemand stelle sich gern Blumen in seine Wohnung. Dazu besorgt er wöchentlich neue: Wir sagen, er kaufe B_n Blumen in der n-ten Woche. Nach etwa drei Wochen sind es also $B_1 + B_2 + B_3$ Blumen in seiner Wohnung. Doch natürlich verwelken diese und werden entsorgt. Eine Blume soll zu einer Wahrscheinlichkeit V_n nach n Wochen noch *nicht* verwelkt sein. Von den B_1 Blumen, die in der ersten Woche gekauft wurden, sind nach der dritten Woche (zwei Wochen später) also noch $V_2 B_1$ vorhanden. Von den B_2 Blumen der zweiten Woche noch $V_1 B_2$ und von den B_3 Blumen der dritten Woche noch $V_0 B_3$. Nach den ersten drei Wochen sind eigentlich also nur noch

$$V_2 B_1 + V_1 B_2 + V_0 B_3 = \sum_{k=1}^{3} V_{3-k} B_k$$

Blumen in der Wohnung. Allgemeiner sind es nach n Wochen noch

$$\sum_{k=1}^{n} V_{n-k} B_k \,.$$

Diesen Wert definieren wir als n-ten Index $(V * B)_n$ der Folge $V * B := (V_n) * (B_n)$, welche wir als Faltung dieser beiden Folgen (V_n) und (B_n) bezeichnen:

$$(V_n) * (B_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} V_{n-k} B_k \right) .$$

Nun bedenken wir, dass womöglich nicht nur einmal wöchentlich Blumen gekauft werden und diese nur einmal wöchentlich plötzlich verwelken können, sondern betrachten z. B. Zeitintervalle von Tagen, nicht Wochen. Eine immer feinere Unterteilung führt zu stetiger Zeit und wir ersetzen die Folgen durch Funktionen und die Summation durch Integration. Die Faltung zweier Funktionen $f, g \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ ist nun

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) \, \mathrm{d}\tau \,.$$

Ein Beispiel für Faltungen von Folgen in der Mathematik wiederum bildet die Multiplikation von Potenzreihen. Es ist nämlich

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n * b_n) x^n \,.$$