Funktionalanalysis I

VORLESUNGSSKRIPT

Prof. Dr. Gitta Kutyniok

26. April 2013

(deutsche Übersetzung ohne Gewähr)

Inhaltsverzeichnis

1 Metrische Räume

In diesem Kapitel werden wir die grundlegenden Begriffe metrischer Räume wiederholen und die Sätze von Baire und Arzelà-Ascoli beweisen. Im gesamten Skript bezeichne $\mathbb{K}$ entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition 1.1. Sei X eine beliebige Menge. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to [0, \infty)$ heißt *Metrik auf* X, wenn für alle $x, y, z \in X$

(i) $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$,

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ und

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (Dreiecksungleichung)

(X, d) heißt dann *metrischer Raum* und $d(x, y)$ wird auch als *Abstand* zwischen x und y bezeichnet. Ist $Y \subseteq X$, dann heißt $d|_{Y\times Y}$ die *induzierte Metrik* Y.

Beachte, dass die Nichtnegativität der Metrik auch mit

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$$

folgt. Wir geben nun einige wichtige Beispiele von Metriken auf Funktionenräumen, Folgenräumen und $\mathbb{K}^n$. Außerdem zeigen wir, dass wir eine Metrik auf jeder beliebigen Menge definieren können.

Beispiel 1.2.

(1) Sei X eine Menge und $d\colon X \times X \to [0, \infty)$ definiert durch

$$d(x, y) := \begin{cases} 1 & x \neq y\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Dies ist die sogenannte *diskrete Metrik* und definiert stets eine Metrik.

(2) Sei X eine Menge. Definiere

$$B(X) = \{f\colon X \to \mathbb{K} : f \text{ ist beschränkt}\}\,.$$

Dann ist

$$d(f, g) := \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$$

eine Metrik auf $B(X)$, die sogenannte *Supremumsmetrik*. Sei nun $X = [a, b]$ und

$$C[a, b] = \{f\colon [a, b] \to \mathbb{K} : f \text{ ist stetig}\}\ .$$

Dann ist

$$C[a, b] \subseteq B[a, b]$$

und somit induziert d eine Metrik auf $C[a, b]$.

(3) Für $1 \leq p < \infty$ sei $d_p\colon \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to [0,\infty)$ definiert durch

$$d_p(x,y) := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad x = (x_j)_{j=1}^n,\ y = (y_j)_{j=1}^n$$

und $d_\infty\colon \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to [0,\infty)$ durch

$$d_\infty(x,y) := \max_{1\leq j\leq n} |x_j - y_j|\,.$$

Für $p = 1, \infty$ ist dies offensichtlich eine Metrik. Satz 1.4 wird zeigen, dass dies auch für $1 < p < \infty$ der Fall ist.

(4) Die Räume $(\mathbb{K}^n, d_p)$ können zu „unendlichdimensionalen Folgenräumen“. Setze hierzu für $1 \leq p < \infty$

$$\ell_p := \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{K},\ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

und definiere $d_p\colon \ell_p \times \ell_p \to [0,\infty)$ über

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dies ist wohldefiniert, denn nach Satz 1.4 ist ℓ_p ein Vektorraum. Sei außerdem ℓ_∞ definiert durch

$$\ell_\infty := \{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist beschränkt} \}$$

und $d_\infty\colon \ell_\infty \times \ell_\infty \to [0,\infty)$ durch

$$d_\infty(x,y) := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|\,.$$

Dann sind (ℓ_p, d_p), $1 \leq p \leq \infty$, metrische Räume, wieder nach Satz 1.4.

Um die Dreiecksungleichung für die ℓ_p-Räume zu zeigen, benötigen wir eine andere, auch für sich selbst bedeutsame Aussage. Die Hölder-Ungleichung liefert eine Abschätzung nach oben für Summen von Produkten durch Produkte von Summen.

Satz 1.3 (Hölder-Ungleichung). *Sei $1 < p < \infty$ und sei $1 < q < \infty$ durch $q := \frac{p}{p-1}$ definiert, d.h. so, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für $x \in \ell_p$ und $y \in \ell_q$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

(Im Fall $p = q = 2$ ist dies die Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

Beweis. Sei $c = \frac{1}{p}$ und definiere $\varphi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch $\varphi(t) = t^c - ct$. Dann ist

$$\varphi'(t) = ct^{c-1} - c \text{ and } \varphi''(t) = c(c-1)t^{c-2}\,.$$

also hat φ ein globales Maximum in $t = 1$. Daraus folgt

$$1 - c \geq t^c - ct \text{ for all } t > 0\,,$$

also

$$t^c - 1 \leq c(t-1)\,. \tag{1.1}$$

Seien nun $a, b > 0$ und $t = \frac{a^p}{b^q}$. Mit (1.1) erhalten wir nun

$$\frac{a}{b^{\frac{q}{p}}} - 1 \leq \frac{1}{p}\left(\frac{a^p}{b^q} - 1\right) \Rightarrow \frac{a}{b^{q\left(\frac{1}{p}-1\right)}} - b^q \leq \frac{1}{p}\left(a^p - b^q\right)\,.$$

Da $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, folgt

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\,. \tag{1.2}$$

Wir definieren nun

$$A = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$B = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$\widetilde{x}_n := \frac{x_n}{A}$ und $\widetilde{y}_n := \frac{y_n}{B}$. O.B.d.A. seien $A, B > 0$. Mit (1.2) erhalten wir

$$|\widetilde{x}_n\widetilde{y}_n| \leq \frac{1}{p}|\widetilde{x}_n|^p + \frac{1}{q}|\widetilde{y}_n|^q\,.$$

Damit ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\widetilde{x}_n\widetilde{y}_n| \leq \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty} |\widetilde{x}_n|^p + \frac{1}{q}\sum_{n=1}^{\infty} |\widetilde{y}_n|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

und schließlich

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq AB\,,$$

womit die Behauptung bewiesen ist. □

Mit der folgenden Minkowski-Ungleichung zeigen wir die Dreiecksungleichung für d_p.

Satz 1.4 (Minkowski-Ungleichung)**.** *Für $1 < p < \infty$ und $x, y \in \ell_p$ gilt*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\,.$$

Beweis. Mit $z_n := x_n + y_n$ erhalten wir zunächst

$$|z_n|^p = |x_n + y_n| \cdot |z_n|^{p-1} \leq (|x_n| + |y_n|)\,|z_n|^{p-1}\,.$$

Hieraus folgt

$$\sum_{n=1}^{m} |z_n|^p \leq \sum_{n=1}^{m} |x_n| \cdot |z_n|^{p-1} + \sum_{n=1}^{m} |y_n| \cdot |z_n|^{p-1} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}\,.$$

Mit Satz 1.3 gilt

$$\sum_{n=1}^{m} |z_n|^p \leq \left(\sum_{n=1}^{m} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{m} |z_n|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{n=1}^{m} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{m} |z_n|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} .$$

Da $(p-1)q = p$, folgern wir

$$\left(\sum_{n=1}^{m} |z_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{m} |z_n|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{n=1}^{m} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{m} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Da die rechte Seite konvergiert, können wir $m \to \infty$ betrachten. Damit ist der Satz bewiesen. □

Die Dreiecksungleichung $d_p(u,w) \leq d_p(u,v) + d_p(v,w)$ für alle $u,v,w \in \ell_p$ für die Metrik d_p kann nun mit $x_n = u_n - v_n$ und $y_n = v_n - w_n$ direkt aus 1.4 gefolgert werden.

Definition 1.5. Sei (X,d) ein metrischer Raum.

(1) Für $x \in X$ und $r > 0$ ist $U_r(x)$ definiert durch

$$U_r(x) := \{y \in X : d(x,y) < r\}$$

und heißt *offene Kugel* vom Radius r und Mittelpunkt x. Eine Menge $U \subset X$ heißt *offen*, wenn zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $U_\varepsilon(x) \subset U$.

(2) Eine Menge $A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, wenn $X \setminus A$ offen ist. Die Menge

$$K_r(x) := \{y \in X : d(x,y) \leq r\} \ , \ x \in X, \ r > 0 ,$$

heißt *abgeschlossene Kugel* vom Radius r und Mittelpunkt x.

(3) Für $E \subseteq X$ heißt $x \in E$ *innerer Punkt von* E, wenn es eine offene Menge $U \subseteq E$ mit $x \in U$ gibt. E heißt dann *Umgebung* x. Die Menge der inneren Punkte von E heißt *Inneres von* E und wird mit $\mathring{E}$ bezeichnet.

(4) Ein Punkt $x \in X$ heißt *Berührpunkt von* E, wenn $U \cap E \neq \varnothing$ für jede Umgebung U von x. Die Menge aller Berührpunkte von E heißt *Abschluss von* E und wird mit $\overline{E}$. E heißt *dicht* in X, wenn $\overline{E} = X$.

Die Offenheit einer Menge und die damit definierbaren Eigenschaften heißen *topologisch*. Insbesondere sind also alle obigen Eigenschaften topologisch. Die offenen Mengen eines metrischen Raumes bilden ein System, das Topologie genannt wird. Diese Begriffe werden mit der Einführung des topologischen Raumes in Kapitel 6 präzisiert.

Lemma 1.6. *Sei (X,d) ein metrischer Raum.*

(i) Es gilt

(a) $\varnothing$, X sind offen.

(b) Sind $U_1, \dots U_r \subseteq X$ offen, dann ist auch $\bigcap_{i=1}^{r} U_i$ offen.

(c) Sind $U_i \subseteq X$, $i \in I$, offen, dann ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i$ is offen.

Damit erzeugt d eine Topologie *auf X mit $U_\varepsilon(x)$, $x \in X$, $\varepsilon > 0$, als Basis.*

(ii) Es gilt

(a) $\varnothing$, X sind abgeschlossen.

(b) Sind $A_i \subseteq X$, $i \in I$, abgeschlossen, dann ist auch $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ abgeschlossen.

(c) Sind $A_1, \dots, A_r \subseteq X$ abgeschlossen, dann ist auch $\bigcup\limits_{i=1}^{r} A_i$ abgeschlossen.

(iii) Für jedes $x \in X$, $r > 0$, ist $K_r(x)$ abgeschlossen.

(iv) Für $E \subseteq X$ ist $\overline{E}$ die kleinste abgeschlossene Menge, die E enthält.

(v) Für $E \subseteq X$ ist $\mathring{E}$ die größte offene Menge, die in E enthalten ist.

Beweis. Übung. $\square$

Wir verallgemeinern nun den Konvergenzbegriff von $\mathbb{K}^n$ (mit der euklidischen Metrik) auf beliebige metrische Räume.

Definition 1.7. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(1) Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ heißt *konvergent* gegen $x \in X$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $d(x_n, x) < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$. Wir schreiben dann $x_n \to x$ für $n \to \infty$ bzw. $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. x heißt *Grenzwert* von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(2) Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N_\varepsilon\,.$$

(3) (X, d) heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in X konvergiert.

Konvergenz einer Folge ist eine topologische Eigenschaft. Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen x genau dann, wenn jede Umgebung von x alle bis auf endlich viele der Folgenglieder enthält. Insbesondere ist der Grenzwert einer Folge unabhängig von der Reihenfolge ihrer Glieder. Ob eine Folge Cauchy-Folge ist, hängt nicht nur von der Wahl der offenen Mengen ab, sondern auch direkt von der gewählten Metrik (siehe Bemerkung 1.11).

Im allgemeinen können topologische Eigenschaften in metrischen Räumen mithilfe von Folgen überprüft werden. Wir geben hier ein Beispiel zur Überprüfung der Abgeschlossenheit einer Menge.

Lemma 1.8. *Sei (X, d) ein metrischer Raum.*

(i) Eine Folge in X hat höchstens einen Grenzwert.

(ii) Sei $E \subset X$. Dann ist $x \in \overline{E}$ genau dann, wenn es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ gibt mir $x_n \to x$ für $n \to \infty$.

(iii) Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ konvergent, dann ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ eine Cauchy-Folge. Die Umkehrung ist im allgemeinen nicht wahr[1]. Eine Cauchy-Folge ist konvergent, wenn sie eine konvergente Teilfolge enthält.

[1] Betrachte z.B. $X = (0, 1]$, $x_n = \frac{1}{n}$.

(iv) *Ist X vollständig und $E \subset X$ abgeschlossen, dann ist auch E vollständig. Ist $E \subset X$ vollständig, dann ist E abgeschlossen in X.*

Beweis. Übung. $\square$

Wir geben nun einige Beispiele für vollständige metrische Räume.

Beispiel 1.9.

(1) $B(X)$ ist vollständig.

Beweis. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $B(X)$ und für $\varepsilon > 0$ sei $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass

$$d(f_n, f_m) < \varepsilon \text{ für alle } n, m \geq N_\varepsilon\,.$$

Daraus folgt $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in X$, $n, m \geq N_\varepsilon$. Also ist $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $x \in X$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$. Mit $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ haben wir

$$|f(x) - f_m(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall m \geq N_\varepsilon\,.$$

Also ist $|f(x)| \leq |f_n(x)| + \varepsilon$ und damit $f \in B(X)$. Außerdem ist für $m \geq N_\varepsilon$

$$d(f, f_m) = \sup_{x\in X} |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon\,,$$

d.h. $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. $\square$

(2) $C[a, b]$ ist vollständig, da es eine abgeschlossene Teilmenge von $B[a, b]$ ist (siehe Lemma 1.8), der eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion konvergiert, einen stetigen Grenzwert besitzt.

(3) $(\mathbb{K}^n, d_p)$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, ist vollständig, da Konvergenz in $\mathbb{K}^n$ bezüglich d_p mit der komponentenweisen Konvergenz in $\mathbb{K}^n$ übereinstimmt.

(4) Die Räume ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$, sind vollständig.

Beweis. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in ℓ_p, $x_k = (x_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$, und für $\varepsilon > 0$ sei $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\begin{aligned} d_p(x_k, x_l) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_{k,n} - x_{l,n}|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon && \text{und} \\ d_\infty(x_k, x_l) &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_{k,n} - x_{l,n}| < \varepsilon && \text{for all } k, l > N_\varepsilon\,. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Für festes $n \in \mathbb{N}$ ist also $(x_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$. Sei $y_n := \lim\limits_{k\to\infty} x_{k,n}$ und $y := (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann ist $y \in \ell_p$ und $y = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
Denn: Betrachte $l \to \infty$. Wir haben (mit 1.3)

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{m} |x_{k,n} - y_n|^p < \varepsilon^p \;\forall m \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow &\sum_{n=1}^{\infty} |x_{k,n} - y_n|^p < \varepsilon^p \;\forall k \geq N_\varepsilon \qquad \text{und} \\ &|x_{k,n} - y_n| < \varepsilon \;\forall k \geq N_\varepsilon,\; n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

Also ist $x_n - y \in \ell_p$ und damit $y \in \ell_p$ und $y = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$. $\square$

Der folgende Satz von Baire gilt nur in vollständigen metrischen Räumen. Er ist zentral in den Beweisen fundamentaler Sätze der Funktionalanalysis, welche demnach auch nur unter Voraussetzung der Vollständigkeit gelten.

Satz 1.10 (Satz von Baire)**.** *Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und seien D_n, $n \in \mathbb{N}$, offene, dichte Teilmengen von X. Then also $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} D_n$ is dense in X.*

Beweis. Wir haben zu zeigen, dass für alle $x \in X$ und $r > 0$

$$U_r(x) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \neq \varnothing\,.$$

Seien hierzu $x \in X$ und $r > 0$ beliebig, aber fest. Wir definieren induktiv Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ und $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ mit

a) $K_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subset D_n \cap U_{r_n}(x_n)$ und

b) $r_n \leq \frac{1}{n}$.

Dies kann wie folgt erreicht werden: Wir setzen zunächst $x_1 = x$ und $r_1 = \min\{1, r\}$. Wir nehmen nun an, dass $x_1, \ldots, x_n, r_1, \ldots, r_n$ bereits gewählt sind ($n \geq 1$). Da die D_n offen und dicht sind, ist auch $D_n \cap U_{r_n}(x_n) \neq \varnothing$ offen. Also gibt es $x_{n+1} \in X$ und $r_{n+1} > 0$ mit

$$U_{2r_{n+1}}(x_{n+1}) \subset D_n \cap U_{r_n}(x) \text{ und } r_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}\,.$$

Damit sind a) und b) erfüllt, da $K_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subset U_{2r_{n+1}}(x_{n+1})$.

Mit den Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die a) und b) erfüllen, haben wir

$$x_n \in K_{r_n} \subset D_{n-1} \cap U_{r_{n-1}}(x_{n-1}) \subset U_{r_{n-1}}(x_{n-1}) \subset \cdots \subset U_{r_m}(x_m)$$

für alle $n > m$. Also ist $d(x_n, x_m) < r_m \leq \frac{1}{m}$ für alle $n > m$. Daher ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X.

Setze nun $x_0 := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ (wohldefiniert, da X vollständig ist). Da $d(x_n, x_m) \leq r_m$ für alle $n > m$, haben wir $d(x_0, x_m) \leq r_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Also gilt schließlich

$$x_0 \in \bigcap_{m=1}^{\infty} K_{r_{m+1}}(x_{m+1}) \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} D_m \cap U_{r_m}(x_m) \subset U_{r_1}(x_1) \cap \bigcap_{m=1}^{\infty} D_m \subset U_r(x) \cap \bigcap_{m=1}^{\infty} D_m$$

und der Satz ist bewiesen. □

Bemerkung 1.11.

(a) Satz 1.10 ist im allgemeinen nicht gültig, wenn X nicht vollständig ist. Sei hierzu $X = \mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \ldots\}$ und $D_n = X \setminus \{q_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Letztere sind offen und dicht, es ist jedoch

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = \varnothing\,.$$

(b) Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $A_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, abgeschlossen mit $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Dann gibt es mindestens ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathring{A}_n \neq \varnothing\,.$$

Beweis. Angenommen,

$$\mathring{A}_n = \varnothing \text{ for all } n \in \mathbb{N}\,.$$

Dann sind $X \setminus A_n$ offen und dicht für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz 1.10 von Baire ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n)$ dicht in X. Allerdings ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n) = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$. $\lightning$ $\square$

(c) Vollständigkeit ist direkt von der gewählten Metrik abhängig und <u>nicht</u> von der Konvergenz der Folgen in X. Betrachte beispielsweise $X = (0, 1]$, $d_1(x, y) := \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ und $d_2(x, y) = |x - y|$. Dann haben wir

$$x_n \to x \text{ in } (X, d_1) \Leftrightarrow x_n \to x \text{ in } (X, d_2)\,,$$

aber (X, d_1) ist vollständig und (X, d_2) nicht (siehe Tutorien).

Definition 1.12. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(1) Sei $\varepsilon > 0$. Dann heißt $M \subset X$ ein *ε-Netz*, wenn $X = \bigcup_{x \in M} U_\varepsilon(x)$. X heißt *totalbeschränkt*, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein endliches ε-Netz gibt. $A \subset X$ ist *totalbeschränkt*, wenn $(A, d|_{A \times A})$ totalbeschränkt ist.

(2) X heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von X (jede Familie von offenen Mengen U_i, $i \in I$, so dass $X = \bigcup_{i \in I} U_i$) eine endliche Teilüberdeckung hat. $(A, d|_{A \times A})$ heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von A (von offenen Mengen in X) eine endliche Teilüberdeckung hat.

Offensichtlich ist jeder kompakte metrische Raum totalbeschränkt. Der folgende Satz zeigt, dass diese beiden Eigenschaften für vollständige Räume äquivalent sind. Beachte jedoch, dass diese Äquivalenz nicht auch für alle Teilmengen vollständiger metrischer Räume gilt (siehe Korollar 1.15).

Satz 1.13. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann sind die folgenden Aussage äquivalent:*

(i) (X, d) ist vollständig und totalbeschränkt.

(ii) (X, d) ist kompakt.

(iii) Jede Folge in X hat eine konvergente Teilfolge.

Beweis. (i)$\Rightarrow$(ii). Angenommen, X wäre nicht kompakt. Sei $\mathfrak{U}$ eine offene Überdeckung von X, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Wir konstruieren induktiv eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ mit

(a) $U_{2^{-n}}(x_n)$ wird nicht durch endlich viele $U \subset \mathfrak{U}$ überdeckt.

(b) $U_{2^{-n}}(x_n) \cap U_{2^{-(n+1)}}(x_{n-1}) \neq \varnothing$.

Für $n = 1$ beachte, dass X totalbeschränkt ist. Also ist $X = \bigcup_{y\in M} U_{\frac{1}{2}}(y)$, $|M| < \infty$, woraus die Existenz eines $y_{i_0} =: x_1 \in X$ folgt, so dass $U_{\frac{1}{2}}(x_1)$ nicht durch endlich viele $U \subset \mathfrak{U}$ überdeckt wird. Nun $(n \mapsto n+1)$ existiert wieder wegen der Totalbeschränktheit eine Menge M, so dass $X = \bigcup_{y\in M} U_{2^{-(n+1)}}(y)$. Es seien nun $x_1, \ldots, x_n$ bereits so gewählt, dass 1) und 1) erfüllt sind. Angenommen, für jedes $y \in M$ mit $U_{2^{-(n+1)}}(y) \cap U_{2^{-n}}(x_n) \neq \varnothing$ wird $U_{2^{-(n+1)}}(y)$ durch endlich viele $U \in \mathfrak{U}$ überdeckt. Dann gilt dies auch $U_{2^{-n}}(x_n)$. $\lightning$ Also gibt es ein $x_{n+1} \in X$ so, dass $U_{2^{-(n+1)}}(x_{n+1})$ nicht von endlich vielen $U \in \mathfrak{U}$ überdeckt wird und $U_{2^{-n}}(x_n) \cap U_{2^{-(n+1)}}(x_{n+1}) \neq \varnothing$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $z_n \in U_{2^{-n}}(x_n) \cap U_{2^{-(n+1)}}(x_{n+1})$. Dann ist für $m > n$

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\le \sum_{\nu=n}^{m-1} d(x_{\nu+1}, x_\nu) \le \sum_{\nu=n}^{m-1} \left(d(x_{\nu+1}, z_\nu) + d(z_\nu, x_\nu)\right) \\ &\le \sum_{\nu=n}^{m-1} \left(2^{-(\nu+1)} + 2^{-\nu}\right) \le 2 \sum_{\nu=n}^{m-1} 2^{-\nu} \le \frac{1}{2^{n-2}}\,. \end{aligned}$$

Damit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Da X vollständig ist, existiert $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Wähle nun $U \in \mathfrak{U}$ mit $x \in U$ und wähle $\varepsilon > 0$ so, dass $U_\varepsilon(x) \subset U$. Dann ist $x_n \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$ für alle $n \ge N$, also $U_{2^{-n}}(x_n) \subset U$ für alle $n \ge N$ mit $2^{-n} < \frac{\varepsilon}{2}$. $\lightning$ zur Wahl von $U_{2^{-n}}(x_n)$.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X und sei $A_n := \overline{\{x_\nu : \nu > n\}} \subset X$. Angenommen, es wäre

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \varnothing\,.$$

Daraus folgt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus A_n) = X$. Da X kompakt ist, enthält die offene Überdeckung $\{X \setminus A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine offene Teilüberdeckung $\{X \setminus A_{n_j} : 1 \le j \le r\}$. Also ist $A_{n+1} \subset A_n$ und somit $X \setminus A_n \subset X \setminus A_{n+1}$. Für $N := \max\{n_j : 1 \le j \le r\}$ haben wir

$$X = \bigcup_{j=1}^{r} X \setminus A_{n_j} = X \setminus A_N\,.$$

Daraus würde $A_N = \varnothing$ folgen, was nicht möglich ist. Dies beweist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \varnothing$. Wählen wir $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, so gibt es eine Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ mit $n_{k+1} > n_k$ und $d(x_{n_k}, x) \le \frac{1}{k}$ [ist n_k gewählt, dann ist $x \in A_{n_{k+1}}$]. Dies zeigt (iii), da $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X ist.

(iii)$\Rightarrow$(i). Jede Cauchy-Folge in X enthält nach Annahme eine konvergente Teilfolge, ist also selbst konvergent. Damit ist X vollständig.

Angenommen, X wäre nicht totalbeschränkt. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass X nicht durch endlich viele $U_\varepsilon(x)$, $x \in X$, überdeckt wird. Wir definieren induktiv eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ mit

$$x_n \notin U_\varepsilon(x_j),\ 1 \le j \le n-1\,.$$

Dies erreichen wir wie folgt: Sei $x_1 \in X$ beliebig. Angenommen, $x_1, \ldots, x_n$ sind bereits gewählt. Da

$$X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} U_\varepsilon(x_j) \neq \varnothing\,,$$

wähle $x_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} U_\varepsilon(x_j)$. Dann haben wir für $n \neq m$

$$d(x_n, x_m) \geq \varepsilon\,.$$

Nach (iii) enthält $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Sei $x := \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Dann ist $d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k > k_0$, also $d(x_{n_k}, x_{n_l}) < \varepsilon$ für alle $k, l > k_0$. $\lightning$ □

Lemma 1.14. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$, $A \neq \varnothing$.*

(i) Ist X totalbeschränkt, dann ist auch A totalbeschränkt.

(ii) Ist A totalbeschränkt, dann ist auch $\overline{A}$ totalbeschränkt.

Beweis. (i). Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung gibt es ein $\frac{\varepsilon}{2}$-Netz $\{x_1, \dots x_n\}$ von X. O.B.d.A. sei $A \cap U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j) \neq \varnothing$ genau, dann wenn $1 \leq j \leq m$, $m \leq n$. Für jedes $1 \leq j \leq m$ wähle $y_j \in A \cap U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j)$. Sei $y \in A$. Dann gibt es ein $1 \leq j \leq m$ mit $y \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j)$ und somit

$$d(y, y_j) \leq d(y, x_j) + d(x_j, y_j) < \varepsilon\,.$$

Daraus folgt, dass $\{y_1, \dots, y_n\}$ ein ε-Netz von A ist.

(ii). Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung gibt es ein $\frac{\varepsilon}{2}$-Netz $\{y_1, \dots, y_n\}$ von A. Sei $x \in \overline{A}$. Dann gibt es ein $y \in A$ mit $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sei y_j so, dass $d(y, y_j) < \frac{\varepsilon}{2}$. Daraus folgt

$$d(x, y_j) \leq d(x, y) + d(y, y_j) < \varepsilon\,,$$

also ist $\{y_1, \dots, y_n\}$ ein ε-Netz von $\overline{A}$. □

Korollar 1.15. *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $A \subset X$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $\overline{A}$ ist kompakt.

(ii) A ist totalbeschränkt.

Beweis. (i)⇒(ii). Da $\overline{A}$ kompakt ist, ist mit Satz 1.13 $\overline{A}$ totalbeschränkt. Nach Lemma 1.14 ist A totalbeschränkt.

(ii)⇒(i). Da A totalbeschränkt ist, ist mit Lemma 1.14 $\overline{A}$ totalbeschränkt. Da X vollständig ist, ist $\overline{A}$ vollständig. Also folgt mir Satz 1.13, dass $\overline{A}$ kompakt ist. □

Definition 1.16. Seien (X, d) und (X', d') metrische Räume und $f\colon X \to X'$.

(1) f heißt *stetig in* $x \in X$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass aus $d(x, y) < \delta$ auch $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ für alle $y \in X$ folgt. Ist f stetig in jedem $x \in X$, so heißt f *stetig*.

(2) f heißt *Homöomorphismus*, wenn f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} stetig sind. f heißt *Isometrie*, wenn $d(x, y) = d'(f(x), f(y))$ für alle $x, y \in X$. Ist f weiterhin bijektiv, ist f ein isometrischer Isomorphismus. X und X' heißen dann *homöomorph* bzw. *isometrisch* bzw. *isometrisch isomorph*.

(3) f heißt *gleichmäßig stetig*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass aus $d(x, y) < \delta$ für alle $x, y \in X$ folgt, dass $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Zueinander isometrisch isomorph zu sein, bedeutet für metrische Räume eine starke Äquivalenz, homöomorph zu sein, ist eine schwächere topologische Äquivalenz.

Lemma 1.17. *Seien (X,d) und (X',d') metrische Räume und $f\colon X \to X'$.*

(i) f ist stetig $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(U)$ ist für alle offenen Mengen $U \subset X'$ offen in X $\Leftrightarrow$ $f(x_n) \to f(x)$ für alle $x_n \to x$ in X.

(ii) Sei X kompakt und f stetig. Dann ist f auch gleichmäßig stetig.

Beweis. Übung. □

Wir wollen nun die relative Kompaktheit (die Kompaktheit des Abschlusses) einer Menge stetiger reeller Funktionen mit der punktweisen relativen Kompaktheit dieser Funktionen in Verbindung bringen. Die relativ kompakten Mengen in $\mathbb{R}$ sind nach Heine-Borel genau die beschränkten Mengen. Ist eine Menge stetiger reeller Funktionen relativ kompakt, erhalten wir punktweise relative Kompaktheit durch Stetigkeit von $C(X) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(x)$ für beliebiges $x \in X$. Für die Umkehrung benötigen wir jedoch eine weitere Voraussetzung: Die gleichgradige Stetigkeit der Funktionen.

Definition 1.18. $F \subset C(X)$ heißt *gleichgradig stetig in $x \in X$*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von x mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $y \in U$ und $f \in F$ gibt. F heißt *gleichgradig stetig*, wenn F in jedem $x \in X$ gleichgradig stetig ist.

Satz 1.19 (Arzelà-Ascoli)**.** *Sei X ein kompakter metrischer Raum und $F \subset C(X)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $\overline{F}$ ist kompakt.

(ii) F ist gleichgradig stetig und punktweise beschränkt.

Beweis. (i)$\Rightarrow$(ii). Übung.

(ii)$\Rightarrow$(i). Für $x \in X$ schreiben wir $F(x) := \{f(x) : f \in F\}$. Sei F gleichgradig stetig und $F(x) \in \mathbb{K}$ beschränkt für alle $x \in X$. Da $C(X)$ vollständig ist, Bleibt mit Korollar 1.15 zu zeigen, dass F totalbeschränkt ist. Sei hierzu $\varepsilon > 0$ und für jedes $x \in X$ sei U_x eine offene Umgebung von x mit

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ für alle } f \in F \text{ und } y \in U_x\,.$$

Seien nun $x_1, \ldots, x_n \in X$ so gewählt, dass $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$, und sei

$$K := \bigcup_{i=1}^{n} F(x_i) \subset \mathbb{K}\,.$$

Da K beschränkt ist, gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ mit

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{m} U_{\frac{\varepsilon}{4}}(\lambda_j)\,.$$

Definiere Φ als die Menge aller Abbildungen $\varphi\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$. Für $\varphi \in \Phi$ sei

$$F_\varphi := \{f \in F : |f(x_i) - \lambda_{\varphi(i)}| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ für } 1 \le i \le n\}\,.$$

Dann ist

$$F = \bigcup_{\varphi \in \Phi} F_\varphi \ :$$

Sei hierzu $f \in F$. Zu jedem $1 \leq i \leq n$ gibt es dann $j \in \{1, \ldots, m\}$ so, dass $f(x_i) \in U_{\frac{\varepsilon}{4}}(\lambda_j)$. Also gibt es ein $\varphi \in \Phi$ mit $f(x_i) \in U_{\frac{\varepsilon}{4}}(\lambda_{\varphi(i)})$. Damit ist $f \in F_\varphi$.

Für $f, g \in F_\varphi$ und $y \in U_{x_i}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, haben wir nun

$$|f(y) - g(y)| \leq |f(y) - f(x_i)| + |f(x_i) - \lambda_{\varphi(i)}| + |\lambda_{\varphi(i)} - g(x_i)| + |g(x_i) - g(y)| < \varepsilon \,.$$

Damit ist $d(f, g) < \varepsilon$ für alle $f, g \in F_\varphi$ und somit existiert ein endliches ε-Netz von F_φ (also auch für F). $\square$

2 Normierte Räume

Definition 2.1. Sei E ein Vekorraum über $\mathbb{K}$.

i) Eine Abbildung $\|\cdot\|\colon E \to [0,\infty)$ heißt *Norm auf* E und $(E, \|\cdot\|)$ *normierter Raum*, wenn für alle $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$ folgende Bedingungen erfüllt sind:

   a) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
   b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ und
   c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

   E heißt *Banach-Raum*, wenn $\left(E, d_{\|\cdot\|}\right)$ vollständig ist (zur Definition von $d_{\|\cdot\|}$ siehe Bemerkung 2.2).

ii) Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf E heißen *äquivalent*, wenn Konstanten $\alpha, \beta > 0$ existieren, so dass

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1 \text{ für alle } x \in E\,.$$

Bemerkung 2.2. Sei E ein Vektorraum.

i) Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf E, dann definiert $d_{\|\cdot\|}(x,y) = \|x - y\|$ eine Metrik auf E.

ii) Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent. Dann ist $(E, \|\cdot\|_1)$ genau dann vollständig, wenn $(E, \|\cdot\|_2)$ vollständig ist.

iii) $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$. Insbesondere ist $\|\cdot\|\colon E \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig.

iv) Die Operationen

$$\begin{aligned} +\colon E \times E \mapsto E \qquad &(x,y) \mapsto x + y \text{ und} \\ \cdot\colon \mathbb{K} \times E \mapsto E \qquad &(\lambda, y) \mapsto \lambda \cdot y \end{aligned}$$

sind stetig, da

$$\begin{aligned} &\|(x+y) - (x_0 + y_0)\| \leq \|x - x_0\| + \|y - y_0\| \text{ und} \\ &\|\lambda x - \lambda_0 x_0\| \leq |\lambda|\|x - x_0\| + |\lambda - \lambda_0|\|x_0\|. \end{aligned}$$

v) Ist $F \subset E$ ein Unterraum von E, dann ist dies auch $\overline{F}$.

Definition 2.3 (Quotientenraum)**.** Sei E ein Vektorraum und $F \subset E$. Dann definiert

$$x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in F \qquad (x, y \in E)$$

eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen sind durch

$$[x]_\sim := \{y \in E : y - x \in F\} := \{y \in E : y \in x + F\} = x + F$$

gegeben. Damit ist $[x]_\sim$ ein *affiner Unterraum*. Der *Quotientenraum* E/F ist definiert als

$$E/F := \{x + F : x \in E\}\ .$$

Mit

$$[x]_\sim + [y]_\sim := [x + y]_\sim \qquad\qquad (x + F) + (y + F) := ((x + y) + F)$$

und

$$\lambda[x]_\sim := [\lambda x]_\sim \qquad\qquad \lambda(x + F) := ((\lambda x) + F)$$

ist E/F ein Vektorraum.

Lemma 2.4. *Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und sei $F \subset E$ ein* abgeschlossener *Unterraum. Dann definiert*

$$\|x + F\| := \inf\{\|x + y\| : y \in F\}$$

eine Norm auf E/F. Weiterhin ist E/F ein Banach-Raum, wenn E ein Banach-Raum ist.

Beweis. Norm-Eigenschaften:

(i) Sei $\|x + F\| = 0$, d.h. es gibt eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$, so dass

$$\|x - y_n\| \to 0, \ n \to \infty\,.$$

Da $y_n \in F$ und F abgeschlossen ist und daher $x \in F$, gilt

$$x + F = F + F = F = [0]_\sim = 0 + F = 0\,.$$

(ii) Es gilt $\|\lambda(x + F)\| = \|(\lambda x) + F\| = \inf\{\|\lambda x + y : y \in F\|\}$.
Für $\lambda = 0$ haben wir

$$\|\lambda(x + F)\| = 0 = |\lambda|\|x + F\|$$

und für $\lambda \neq 0$

$$\begin{aligned}\|\lambda(x + F)\| &= \inf\{\|\lambda x + y\| : y \in F\}\\ &= |\lambda| \inf\{\|x + y\| : y \in F\}\\ &= |\lambda|\|x + F\|.\end{aligned}$$

(iii) Seien $x, y \in E$, $\varepsilon > 0$. Wähle $z_1, z_2 \in F$ so, dass

$$\begin{aligned}\|x + F\| &\geq \|x + z_1\| - \tfrac{\varepsilon}{2}\,,\\ \|y + F\| &\geq \|y + z_2\| - \tfrac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}\|(x + F) + (y + F)\| &= \|(x + y) + F\|\\ &\leq \|x + z_1 + y + y_2\|\\ &\leq \|x + F\| + \|y + F\| + \varepsilon\,.\end{aligned}$$

E Banach $\Rightarrow E/F$ Banach: Sei E vollständig und sei $(x_n + F)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in E/F, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq N : \|(x_n - x_m) + F\| \leq \varepsilon\,.$$

Für jedes $i \in \mathbb{N}$ können wir also ein $n_i \in \mathbb{N}$ finden, so dass

$$\|x_{n_{i+i}} - x_{n_i} + F\| < 2^{-i}\,.$$

Insbesondere existiert ein $y_i \in F$ mit

$$\|x_{n_{i+1}} - x_{n_i} + y_i\| < 2^{-i}\,.$$

Wir dürfen nun $n_i < n_{i+1}$ annehmen. Definiere

$$\begin{aligned} z_1 &:= 0\,, \\ z_{i+1} &:= y_i + z_i \qquad i \geq 1\,. \end{aligned}$$

Damit haben wir

$$\|(x_{n_{i+1}} + z_{i+1}) - (x_{n_i} + z_i)\| < 2^{-i}\,.$$

Setze nun $\eta_i := x_{n_i} + z_i$, womit wir erhalten, dass

$$\begin{aligned} & \|\eta_{i+1} - \eta_i\| < 2^{-i} \\ \Rightarrow \quad & \|\eta_{m+k} - \eta_m\| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \|\eta_{m+i+1} - \eta_{m+i}\| < \sum_{i=0}^{k+1} 2^{-m-i} \leq 2^{1-m} \\ \Rightarrow \quad & (\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Cauchy-Folge in } E \\ \Rightarrow \quad & (\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert}\,. \end{aligned}$$

Mit $\lim_{n\to\infty} \eta_n =: x$ erhalten wir nun

$$\begin{aligned} \|(x_n + F) - (x + F)\| &= \|(x_n - x) + F\| \\ &\overset{z_i \in F}{\leq} \|x_{n_i} + z_i - x\| = \|\eta_i - x\| \to 0\,. \end{aligned}$$

Dies liefert eine konvergente Teilfolge, die Cauchy-Folge konvergiert also. □

Lemma 2.5. *Sei E ein normierter Vektorraum und $F \subset E$ ein abgeschlossener Unterraum. Sind F und E/F Banach-Räume, dann ist auch E einer.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ eine Cauchy-Folge in E. Damit gilt

$$\|(x_n + F) - (x_m + F)\| = \|(x_n - x_m) + F\| \leq \|x_n - x_m\|\,.$$

Also ist $(x_n+F)_n \subset E/F$ eine Cauchy-Folge in E/F. Mit $x+F := \lim_{n\to\infty} x_n+F$ erhalten wir

$$\inf\{\|x_n - x + y\| : x \in F\} = \|(x_n - x) + F\| \to 0\,.$$

Also existiert eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ mit $\|x_n - x + y_n\| \to 0$. $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge:

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\| &= \|y_n + x_n - x - x_n + x_m - y_m - x_m + x\| \\ &\leq \|y_n + x_n - x\| + \|x_n - x_m\| + \|y_m + x_m - x\| \xrightarrow{m,n\to\infty} 0\,. \end{aligned}$$

D.h. $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Setze $y := \lim_{n\to\infty} y_n \in F$. Nun gilt

$$\|x_n - x + y\| \leq \|x_n + y_n - x\| + \|y - y_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

und damit konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x - y$. □

Korollar 2.6. *Ein endlichdimensionaler normierter Vektorraum E ist stets ein Banach-Raum.*

Beweis. Beweis durch Induktion.

$n = 1$: Sei $\dim E = 1$. Wähle $x \in E$ so, dass $\|x\| = 1$. Dann definiere die Isometrie $q\colon \mathbb{R} \mapsto E, q(\lambda) := \lambda x$. Damit ist $E \cong \mathbb{R}$ und E ist ein Banach-Raum.

$n \to n+1$: Die Aussage gelte für n-dimensionale normierte Vektorräume. Sei $\dim E = n+1$. Wähle $x \in E \setminus \{0\}$ und setze $F := \operatorname{span} x$. Da $\dim F = 1$, ist F vollständig und somit abgeschlossen. Es gilt

$$\dim(E/F) = \dim E - \dim F = n\,.$$

Nach Annahme ist E/F vollständig, und mit Lemma 2.5 ist E ein Banach-Raum.

□

Lemma 2.7. *Sei F ein abgeschlossener Unterraum eines normierten Vektorraumes E. Dann existieren für jedes $x \in E \setminus F$ Konstanten $M, M' > 0$, so dass*

$$\begin{aligned}|\lambda| &\le M\|\lambda x + y\|\,,\\ \|y\| &\le M'\|\lambda x + y\|\end{aligned}$$

für alle $y \in F$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

Beweis. Mit $x \notin F$ und da F abgeschlossen ist, haben wir $\|x + F\| \neq 0$. Wir definieren

$$M := \|x + F\|^{-1}$$

und

$$M' := 1 + M\|x\|\,.$$

Für $y \in F$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ erhalten wir nun

$$\begin{aligned}\|\lambda\| &= M|\lambda|\|x + F\|\\ &\le M\|\lambda x + y\|\end{aligned}$$

und für $\lambda \in \mathbb{K}$ haben wir

$$\begin{aligned}\|y\| &\le \|y + \lambda x\| + |\lambda|\|x\|\\ &\le \|y + \lambda x\| + M\|\lambda x + y\|\|x\|\\ &= \|y + \lambda x\|(1 + M\|x\|)\,.\end{aligned}$$

□

Lemma 2.8. *Sei $T\colon E \to X$ eine lineare Abbildung zwischen zwei normierten Vektorräumen E und X, wobei $\dim E < \infty$. Dann existiert ein $c > 0$, sodass für alle $x \in E$*

$$\|Tx\|_X \le c\|x\|_E$$

gilt.

Beweis. Sei $n := \dim E$. Für $n = 1$ wähle $x_0 \in E$ mit $\|x_0\| = 1$. Dann ist

$$E = \operatorname{span}\{x_0\}$$

und für $x = \lambda x_0 \in E$ haben wir

$$\|Tx\|_X = \|T(\lambda x_0)\|_X = |\lambda|\|Tx_0\|_X \overset{\|x_0\|=1}{=} \underbrace{\|Tx_0\|_X}_{=:c}\underbrace{\|\lambda x_0\|_E}_{=\|x\|}\,.$$

Angenommen, die Aussage gilt für $\dim E = n$. Betrachte nun $\dim E = n+1$. Wähle einen n-dimensionalen Unterraum $F \subset E$. Sei $x_0 \in E \setminus F$. Zu jedem $x \in E$ gibt es dann $\lambda \in \mathbb{K}$, $y \in F$, so dass
$$x = \lambda x_0 + y\,,$$
d.h. $E = F \dotplus \operatorname{span}\{x_0\}$. Nach Annahme gibt es ein $c' > 0$, so dass
$$\|Ty\|_X \le c'\|y\|_E \qquad \text{für alle } y \in F\,.$$
Nach Korollar 2.6 ist F abgeschlossen und mit Lemma 2.7 erhalten wir
$$\|T(\lambda x_0 + y)\|_X \le |\lambda|\|Tx_0\|_X + c'\|y\|_E \le (\|Tx_0\|_X M + c'M')\|\lambda x_0 + y\|.$$
□

Korollar 2.9. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(a) Zwei Normen auf endlich-dimensionalen Vektorräumen sind stets äquivalent.

(b) Seien E, F normierte Vektorräume und $\dim E < \infty$. Dann gibt es für jede lineare und bijektive Abbildung $T\colon E \to F$ Konstanten $c, d > 0$, so dass
$$\|Tx\| \le c\|x\| \quad \textit{und} \quad \|T^{-1}y\| \le d\|y\|.$$

(c) Sei E ein endlich-dimensionaler normierter Raum und sei $A \subset E$. Dann ist A genau dann kompakt, wenn A beschränkt und abgeschlossen ist.

Beweis. (a). Betrachte
$$T\colon (E, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_2)\,, Tx := x,\; x \in E\,,$$
wobei $\|\cdot\|_i$ eine Norm auf E darstellt, $i = 1, 2$. Dann impliziert Lemma 2.8, dass
$$\|Tx\|_1 \le c\|x\|_2 \text{ und } \|Tx\|_2 \le d\|x\|_1$$
für bestimmte $c, d > 0$. Da $Tx = x$, ist die Behauptung bewiesen.

(b). T^{-1} ist linear, daher folgt mit Lemma 2.8 die Behauptung.

(c). Für $\mathbb{K}^n$ mit der euklidischen Norm gilt die Aussage bekanntlich. Sei $\dim(E) = n$. Dann existiert eine bijektive lineare Abbildung $T\colon \mathbb{K}^n \to E$. Mit (b) existieren $c, d > 0$ mit $\|Tx\| \le c\|x\|$ und $\|T^{-1}y\| \le d\|y\|$. Daraus folgt
$$A \text{ ist beschränkt und abgeschlossen} \Leftrightarrow T^{-1}A \text{ ist beschränkt und abgeschlossen in } \mathbb{K}^n$$
und damit
$$A \text{ ist kompakt} \Leftrightarrow T^{-1}A \text{ ist kompakt}\,.$$
□

Satz 2.10. *Für einen normierten Raum E sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\dim E < \infty$.

(ii) E ist lokal kompakt, d.h. jedes $x \in E$ besitzt eine kompakte Umgebung.

(iii) $K_1(0)$ *ist kompakt.*

Beweis. (i)⇒(ii). Folgt aus Korollar 2.9(c).

(ii)⇒(iii). Sei K eine kompakte Umgebung von 0. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $K_\delta(0) \subset K$. $K_\delta(0)$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von K, also kompakt. Da die Abbildung $x \mapsto \frac{x}{\delta}$ kompakte Mengen erhält, folgt (iii).

(iii)⇒(i). Die Kompaktheit von $K_1(0)$ bedeutet, dass $K_1(0)$ is totalbeschränkt ist. Also existiert ein endliches $\frac{1}{2}$-Netz $y_1, \ldots, y_n$ von $K_1(0)$. Sei $F := \operatorname{span}(y_1, \ldots, y_n)$. Wir zeigen nun $E = F$, um die Behauptung zu beweisen.

Angenommen, $F \neq E$. Dann gibt es ein $x_0 \in E \setminus F$, d.h. $\operatorname{dist}(x_0, F) = \inf_{y \in F} \|x_0 - y\| > 0$ (F ist endlich-dimensional, also abgeschlossen). Wähle $y_0 \in F$ so, dass

$$\|x_0 - y_0\| \leq 2\operatorname{dist}(x_0, F)\,.$$

Definiere

$$x = \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|} \in K_1(0)\,.$$

Für alle $y \in F$ haben wir nun

$$\|x - y\| = \|x - y_0\|^{-1} \|x_0 - (y_0 + \|x_0 - y_0\| y)\|\,.$$

Da $y_0 + \|x_0 - y_0\| y \in F$, erhalten wir

$$\|x_0 - (y_0 + \|x_0 - y_0\| y)\| \geq \operatorname{dist}(x_0, F)\,.$$

Daher gilt

$$\|x - y\| \geq \|x - y_0\|^{-1} \operatorname{dist}(x_0, F) \geq \frac{1}{2\operatorname{dist}(x_0, F)} \operatorname{dist}(x_0, F) = \frac{1}{2}\,.$$

Also ist x nicht in $\bigcup_{i=1}^n U_{\frac{1}{2}}(y_i)$. ↯, also $F = E$. □

Beispiel 2.11.

(1) Die Metrik $d_{\sup}(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ auf $B(X)$ ist induziert durch $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$. Also ist $(B(X), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banach-Raum.

(2) ℓ_p und L_p sind Banach-Räume.

(3) $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von ℓ_p, also ist $\mathbb{K}^n$ ein Banach-Raum.

(4) Seien E, F normierte Vektorräume über $\mathbb{K}$. Dann ist auch $E \times F$ ein normierter Vektorraum (*Produktraum*) mit den Operationen

$$\lambda(x, y) := (\lambda x, \lambda y)$$
$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

und der Norm $\|(x, y)\| := \max(\|x\|_E, \|y\|_F)$. Sind E und F Banach-Räume, dann ist es auch $E \times F$.

Beweis. Sei $(x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $E \times F$. Dann sind auch $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in E bzw. F, konvergieren also gegen Elemente $x^* \in E$, $y^* \in F$. Dann gilt jedoch auch

$$(x_n, y_n) \to (x^*, y^*).$$

□

Seien allgemeiner $E_1, \dots, E_r$ normierte Vektorräume über $\mathbb{K}$ mit Normen $\|\cdot\|_1, \dots, \|\cdot\|_r$. Dann ist auch $E_1 \times \dots \times E_r$ ein normierter Vektorraum mit der Norm

$$\|(x_1, \dots, x_r)\|_\infty := \max(\|x_1\|_1, \dots, \|x_r\|_r) \quad \text{oder}$$
$$\|(x_1, \dots, x_r)\|_p := \left(\sum_{i=1}^{r} \|x_i\|_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Sind $E_1, \dots, E_r$ vollständig, dann auch $E_1 \times \dots \times E_r$ und umgekehrt. Weiterhin ist Konvergenz in $E_1 \times \dots \times E_r$ äquivalent zu komponentenweiser Konvergenz, d.h. Konvergenz jeder Komponente $x_i \in E_i$.

3 Lineare Operatoren und Dualräume

Lemma 3.1. *Seien E, F normierte Vektorräume über $\mathbb{K}$ und sei $T\colon E \to F$ ein linearer Operator (eine lineare Abbildung). Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) T ist stetig auf ganz E.

(ii) T ist stetig in einem Punkt $x_0 \in E$.

(iii) T ist beschränkt, d.h. $\|Tx\| \leq c\|x\|$ für alle $x \in E$ und ein $c > 0$.

Beweis. (i)$\Rightarrow$(ii). Trivial.

(ii)$\Rightarrow$(i). Sei T stetig in x_0. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in E$ mit $\|x - x_0\| \leq \delta$ gilt, dass $\|Tx - Tx_0\| \leq 1$. Setze $y = \delta^{-1}(x_0 - x)$. Dann haben wir $\left\|\frac{\delta y}{\|y\|}\right\| \leq \delta$ und erhalten

$$\left\|T\left(\frac{\delta y}{\|y\|}\right)\right\| \leq 1$$

und damit

$$\|Ty\| \leq \frac{\|y\|}{\delta}\,.$$

(iii)$\Rightarrow$(i). Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt $\|T(x - x_0)\| \leq c\|x - x_0\| < \varepsilon$ genau dann, wenn $\|x - x_0\| \leq \frac{\varepsilon}{c}$. Daraus folgt, dass $T(K_{\frac{\varepsilon}{c}}(x_0)) \subseteq K_{\frac{\varepsilon}{c}}(Tx_0)$. Hiermit ist T stetig. $\square$

Definition 3.2. Seien E, F normierte Vektorräume über $\mathbb{K}$.

(i) wir bezeichnen die Menge aller beschränkter linearer Operatoren von E nach F mit

$$L(E,F) := \{T\colon E \to F \;:\; T \text{ ist linear und beschränkt}\}\,.$$

Ist $E = F$, schreiben wir auch $L(E)$ statt $L(E,F)$ bzw. $L(E,E)$.

(ii) Die *Operatornorm* auf $L(E,F)$ ist definiert durch

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F\,.$$

Lemma 3.3. *Seien E, F, G normierte Vektorräume über $\mathbb{K}$.*

(i) $(L(E,F), \|\cdot\|)$ ist ein normierter Vektorraum. Für $T \in L(E,F)$ gilt weiterhin

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \inf\{c : \|Tx\| \leq c\|x\| \quad \forall x \in E\}\,.$$

(ii) Ist $T \in L(E,F)$ und $S \in L(F,G)$, dann ist $S \circ T \in L(E,G)$ und es gilt $\|S \circ T\| \leq \|S\|\|T\|$.

Beweis. (i). Es ist bekannt, dass die linearen Operatoren von E nach F einen Vektorraum bilden. Für $T_1, T_2, T \in L(E,F)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ und beliebiges $x \in E$ mit $\|x\| = 1$ haben wir nun

$$\|(T_1 + T_2)x\| \leq \|T_1 x\| + \|T_2 x\| \leq \|T_1\| + \|T_2\| \|\lambda T\| \leq |\lambda|\, \|Tx\| \leq |\lambda|\, \|T\|\,.$$

Da x beliebig gewählt wurde, haben wir gezeigt, dass $(T_1+T_2), \lambda T \in L(E,F)$, und damit, dass $L(E,F)$ ein Vektorraum ist. Außerdem ist offensichtlich, dass $\|T\| = 0 \Rightarrow T = 0$. Also definiert $\|\cdot\|$ eine Norm. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\| &\ge \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{y\neq 0} \left\| T\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right\| = \sup_{y\neq 0} \frac{\|Ty\|}{\|y\|} \\ &\ge \sup_{\substack{y\neq 0\\ \|y\|\le 1}} \frac{\|Ty\|}{\|y\|} \ge \sup_{\substack{y\neq 0\\ \|y\|\le 1}} \|Ty\| \ge \sup_{\|y\|\le 1} \|Ty\| \,. \end{aligned}$$

Hiermit ist bewiesen, dass

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \,.$$

Schließlich gilt, wenn $\|Tx\| \le c\|x\|$ für alle $x \in E$,

$$\begin{aligned} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \le c &\Rightarrow \|T\| \le c \\ &\Rightarrow \inf\{c : \|Tx\| \le c\|x\| \quad \forall x \in E\} \ge \|T\| \end{aligned}$$

für alle $x \in E$. Für $x \neq 0$ gilt ebenso

$$\|Tx\| = \frac{\|Tx\|}{\|x\|}\|x\| \le \|T\|\|x\| \,.$$

Nun haben wir also

$$\|T\| \in \{c : \|Tx\| \le c\|x\| \quad \forall x \in E\} \Rightarrow \|T\| \le \inf\{c : \|Tx\| \le c\|x\| \quad \forall x \in E\} \,.$$

(ii). Übungsaufgabe. □

Definition 3.4. Sei E ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $\ell\colon E \to \mathbb{K}$ heißt dann *Funktional* auf E. Der Raum $L(E,\mathbb{K})$ aller beschränkten linearen Funktionale heißt *Dualraum* von E und wird mit E^* bezeichnet.

Satz 3.5. *Sei E ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K}$ und sei F ein Banach-Raum über $\mathbb{K}$. Dann ist $L(E,F)$ ein Banach-Raum. Insbesondere ist E^* für jeden normierten Vektorraum E ein Banach-Raum.*

Beweis. Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L(E,F)$. Da

$$\|T_n x - T_m x\| \le \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| \,,$$

ist auch $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $x \in E$ eine Cauchy-Folge in F. Da F vollständig ist, können wir mit $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$ den Operator $T\colon E \to F$ definieren.

<u>T ist linear:</u> Seien $x, y \in E$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$T(\lambda x + \mu y) = \lim_{n\to\infty} T_n(\lambda x + \mu y) = \lambda \cdot \lim_{n\to\infty} T_n x + \mu \cdot \lim_{n\to\infty} T_n y = \lambda \cdot Tx + \mu \cdot Ty \,.$$

<u>T ist beschränkt:</u> Seien $\varepsilon > 0$ und $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N_\varepsilon$. Daraus erhalten wir

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| < \varepsilon\|x\|$$

für alle $m, n \geq N_\varepsilon$ und alle $x \in E$. Mit $n \to \infty$ folgt $\|Tx - T_m x\| \leq \varepsilon\|x\|$ für alle $m \geq N_\varepsilon$. Also gilt $\|Tx - T_{N_\varepsilon x}\| \leq \varepsilon\|x\|$. Hieraus folgt, dass

$$\|Tx\| \leq \varepsilon \cdot \|x\| + \|T_{N_\varepsilon} x\| \leq (\varepsilon + \|T_{N_\varepsilon}\|) \cdot \|x\|$$

für alle $x \in E$. Damit ist $T \in L(E, F)$.

<u>$T_n \to T$:</u> Wegen $\|Tx - T_{N_m} x\| \leq \varepsilon \cdot \|x\|\ \forall m \geq N_\varepsilon$ haben wir $\|T - T_m\| \leq \varepsilon$. Damit gilt $\lim_{m\to\infty} T_m = T$.

□

Lemma 3.6. *Sei E ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K}$, $L \subset E$ sei ein Unterraum, F ein Banach-Raum und $T\colon L \to F$ ein stetiger linearer Operator. Dann gibt es genau einen Operator $S \in L(\overline{L}, F)$ mit $S|_L = T$. Für diesen gilt weiterhin*

$$\|S\| = \|T\|.$$

Beweis. Sei $x \in \overline{L}$ und sei $(x_n) \subset L$ eine gegen x konvergierende Folge. Es gilt

$$\|Tx_n - Tx_m\| \leq \|T\|\|x_n - x_m\|.$$

Daher ist (Tx_n) eine Cauchy-Folge in F. Da F vollständig ist, konvergiert (Tx_n). Für andere gegen x konvergierende Folgen (y_n) haben wir

$$\|Tx_n - Ty_n\| \leq \|T\|\|x_n - y_n\|.$$

Also gilt $\lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} Ty_n$. Daher ist

$$Sx = \lim_{n\to\infty} Tx_n$$

wohldefiniert. Die Gleichung $S|_L = T$ folgt nun sofort, da wir für $x \in L$ auch die Konstante Folge mit $x_n := x$ für alle $n \in \mathbb{N}$ in der Definition verwenden können. Die Linearität von S ergibt sich leicht mit

$$S(x + y) = \lim_{n\to\infty} T(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} Tx_n + \lim_{n\to\infty} Ty_n = Sx + Sy,$$

analog zeigt man $S(\lambda x) = \lambda Sx$. Weiterhin gilt $\|S\| \geq \|S|_L\| = \|T\|$. Für die Umkehrung wähle $x \neq 0 \in \overline{L}$ und sei (x_n) eine gegen x konvergierende Folge in L. Dann ist

$$\|Sx\| = \lim_{n\to\infty} \| Tx_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \|T\|\|x_n\| = \|T\|\|x\|\,.$$

Damit ist $\|S\| = \|T\|$ gezeigt, S ist also beschränkt. Es bleibt, die Eindeutigkeit von S zu zeigen. Sei dazu R ein anderer stetiger Operator mit $R|_L = T$ und $x \in \overline{L}$. Für beliebige gegen x konvergierende Folgen (x_n) erhalten wir wegen Stetigkeit

$$Rx = \lim_{n\to\infty} Rx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = Sx.$$

□

Korollar 3.7. *Stimmen zwei Operatoren $S, T \in L(E, F)$, wobei F ein Banach-Raum und E ein normierter Vektorraum ist, auf einem dichten Unterraum von E überein, dann stimmen sie auch auf E überein.*

Beweis. Folgt aus der Einzeigeitsaussage des letzten Lemmas. □

Lemma 3.8. *Seien E, F normierte Vektorräume über $\mathbb{K}$ und sei $T\colon E \to F$ linear. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Es existiert ein linearer beschränkter inverser Operator

$$T^{-1}\colon T(E) \to E\,.$$

(ii) Es gibt ein $c > 0$, so dass $c\|x\| \le \|Tx\|$.

Beweis. (i)⇒(ii). Angenommen, T^{-1} existiere. Die Stetigkeit dieses Operators liefert ein $\gamma > 0$, so dass

$$\|T^{-1}y\| \le \gamma\|y\|, \quad y \in T(E)\,.$$

Für ein beliebiges $x \in E$ setzen wir $y = Tx$ und erhalten

$$\|x\| \le \gamma\|Tx\|\,.$$

Mit $c := \frac{1}{\gamma}$ haben wir nun (ii) gezeigt.

(ii)⇒(i). Durch (i) ist die Injektivität von T gegeben (ist $x \in \ker(T)$, dann ist $\|x\| = 0$). Daher existiert ein Operator $T^{-1}\colon\ \operatorname{ran} E \to E$. Setzt man nun $y = Tx$ in (i) ein, erhält man die Existenz eines $c > 0$ mit

$$c\|T^{-1}y\| \le \|y\| \quad \forall y \in T(E)\,.$$

Daher ist T^{-1} stetig. □

Definition 3.9 (Graph von T)**.** Seien E, F normierte Vektorräume, $L \subseteq E$ ein Unterraum und $T\colon L \to F$ ein linearer Operator.

(i) Der *Graph von T* ist definiert als

$$G_T = \{(x, Tx), x \in L\} \subseteq L \times F\,.$$

(ii) T heißt *abgeschlossen*, wenn G_T abgeschlossen ist.

Lemma 3.10. *Seien E, F, T und L wie oben definiert. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) T ist abgeschlossen.

(ii) Konvergiert $(x_n) \subseteq L$ gegen $x \in E$ und (Tx_n) gegen $y \in F$, dann gilt $x \in L$, $y = Tx$.

Beweis. Wegen

$$\|(x_n, Tx_n) - (x, y)\| = \max(\|x_n - x\|, \|Tx_n - y\|)$$

können wir aus $x_n \to x$ und $Tx_n \to y$ folgern, dass

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, Tx_n) = (x, y)\,.$$

Da G_T abgeschlossen ist, ist $(x, y) \in G_T$. Daher ist $x \in L$ mit $y = Tx$. Betrachte nun eine Folge $(x_n, y_n) \to (x, y)$ in G_T. Mit der Konvergenz von $y_n = Tx_n$ und (ii) erhalten wir $x \in L$, $y = Tx$, also $(x, y) \in G_T$. □

Bemerkung 3.11. Ist L abgeschlossen und T stetig, dann ist T abgeschlossen. Insbesondere ist jedes $T \in L(E, F)$ abgeschlossen.

Beweis. Ist $(x_n, Tx_n) \to (x, y)$, dann (da L abgeschlossen ist) ist $x \in L$. Die Stetigkeit von T liefert $Tx_n \to Tx$, also $(x, y) \in G_T$. □

Satz 3.12. *Sei $1 \leq p < \infty$. Definiere q über $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, d.h.*

$$q = \begin{cases} \frac{p}{p-1} & 1 < p < \infty \\ \infty & p = 1\,. \end{cases}$$

Definiere für $y \in \ell_q$ weiterhin

$$f_y \colon \ell_p \to \mathbb{K},\ x = (x_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n\,.$$

Dann ist $f_y \in \ell_p^*$ und $y \mapsto f_y$ ist ein isometrischer Isomorphismus. Insbesondere gilt $\ell_q \cong \ell_p^*$.

Beweis. f_y ist aufgrund der Hölder-Ungleichung wohldefiniert (d.h. die Reihe konvergiert):

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \|x\|_p \|y\|_q\,.$$

Offensichtlich ist f_y linear. Außerdem haben wir

$$\|f_y(x)\| \leq \|x\|_p \|y\|_q\,.$$

Daher ist f_y beschränkt und somit $f_y \in \ell_p^*$. Wir behaupten, dass $\|f_y\| = \|y\|_q$. Wir haben jedoch bereits $\|f_y\| \leq \|y\|_q$ gezeigt. Für die Umkehrung führen wir eine Fallunterscheidung durch.

$\underline{p = 1}$: Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$|y_n| \geq \|y\|_q - \varepsilon\,.$$

Setze $x = e_n \in \ell_1$. Wir erhalten $f_y(x) = y_n$. Aus $\|x\| = 1$ folgt $\|f_y\| \geq \|y\|_\infty - \varepsilon$. Da ε beliebig gewählt werden kann, haben wir $\|f_y\| \geq \|y\|_q$.

$\underline{p > 1}$: Definiere x über

$$x_n = \begin{cases} 0 & y_n = 0, \\ \frac{|y_n|^q}{y_n} & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Dann gilt $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^{p(q-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q < \infty$ und daher ist $x \in \ell_p$.

Wir bestimmen nun $f_y(x)$:

$$f_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q = \|y\|_q^q\,.$$

Daher gilt $\frac{|f_y(x)|}{\|x\|} = \|y\|^{\frac{q(p-1)}{p}} = \|y\|_q$, und wir folgern $\|f_y\| \geq \|y\|_q$.

Damit ist $y \mapsto f_y$ eine Isometrie. Für die Surjektivität setze für $f \in \ell_p^*$

$$y_n := f(e_n)\,.$$

Um $y = (y_n) \in \ell_q$ zu zeigen, führen wir wieder eine Fallunterscheidung durch.

$\underline{p = 1}$ Für alle n haben wir

$$|y_n| = |f(e_n)| \leq \|f\|\|e_n\| = \|f\|\,.$$

Daher ist $\|y\|_\infty \leq \|f\|$, $y \in \ell_\infty$.

$\underline{p > 1}$ Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n=1}^m |y_n|^q = \sum_{\substack{n=1\\ y_n \neq 0}}^m \frac{|y_n|^q}{y_n} f(e_n) = f\left(\sum_{\substack{n=1\\ y_n \neq 0}}^m \frac{|y_n|^q}{y_n} e_n\right) \leq \|f\| \left\| \sum_{\substack{n=1\\ y_n \neq 0}}^m \frac{|y_n|^q}{y_n} e_n \right\|_p .$$

Wir haben

$$\left\| \sum_{\substack{n=1\\ y_n \neq 0}}^m \frac{|y_n|^q}{y_n} e_n \right\|_p = \left(\sum_{\substack{n=1\\ y_n \neq 0}} |y_n|^{p(q-1)} \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Damit gilt

$$\sum_{n=1}^m |y_n|^q \leq \|f\| \left(\sum_{n=1}^m |y_n|^q \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Hieraus folgt, dass

$$\left(\sum_{n=1}^m |y_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|\,.$$

Mit $m \to \infty$ erhalten wir $\|y\|_q < \infty \Rightarrow y \in \ell_q$.

Schließlich haben wir $f = f_y$, da für $x = \sum_{n=1}^m x_n e_n$ gilt, dass

$$f(x) = \sum_{n=1}^m x_n f(e_n) = \sum_{n=1}^m x_n y_n = f_y(x)\,.$$

Damit stimmt f mit f_n auf dem dichten linearen Unterraum $\operatorname{span}(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ überein, also auch auf dem ganzen Raum (nach Lemma 3.6, $\mathbb{K}$ ist ein Banach-Raum). □

Lemma 3.13. *Seien E, F normierte Vektorräume und sei $T \in L(E, F)$. Dann gilt für den Operator $T^* \colon F^* \to E^*$,*

$$T^*\varphi = \varphi \circ T, \quad \varphi \in F^*\,,$$

dass $T^* \in L(F^*, E^*)$.

Beweis. T^* ist offensichtlich linear. Weiterhin gilt

$$\|(T^*\varphi)x\| = \|\varphi(Tx)\| \leq \|\varphi\|\|T\|\|x\|\,.$$

Damit ist T^* beschränkt mit $\|T^*\| \leq \|T\|$. □

Definition 3.14. Seien E, F normierte Vektorräume und sei $T \in L(E, F)$. Dann heißt $T^* \colon F^* \to E^*$, $T^*\varphi = \varphi \circ T$, *dualer Operator* von T.

Index

Literatur

[1] H. W. Alt, *Lineare Funktionalanalysis. Eine anwendungsorientierte Einführung*, 6. Aufl., Springer, 2012.

[2] J. B. Conway, *A course in functional analysis*, 2. Aufl., Springer, 1990.

[3] H. Heuser, *Funktionalanalysis. Theorie und Anwendung*, 4. Aufl., Teubner, 2006

[4] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, 1991.

[5] D. Werner, *Funktionalanalysis*, 7. Aufl., Springer, 2011.

[6] O. Christensen, *Frames and bases: an introduction course*, Birkhäuser, 2008